



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SERTÃO  
PERNAMBUCANO  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA  
CAMPUS SERRA TALHADA**

ROGERIO DE SOUZA ZOME

**EFICIÊNCIA DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA PARA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM FÍSICA**

SERRA TALHADA-PE

2023

ROGERIO DE SOUZA ZOME

**EFICIÊNCIA DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA PARA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS EM FÍSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. AlessioTony Batista Celeste

SERRA TALHADA-PE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Z83 Zome, Rogério de Souza.

Eficiência do método de Runge-Kutta para resolução de problemas em física / Rogério de Souza Zome. - Serra Talhada, 2023.  
35 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2023.  
Orientação: Prof. Dr. Aléssio Tony Batista Celeste.

1. Física. 2. Equações diferenciais. 3. Métodos numéricos. 4. Runge-Kutta. I. Título.

CDD 530

ROGERIO DE SOUZA ZOME

**EFICIÊNCIA DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA PARA RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS EM FÍSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do curso de Licenciatura em  
Física do Instituto Federal de Educação, Ciência  
e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus  
Serra Talhada, como requisito parcial à  
obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado em: 15/12/2023.

Documento assinado digitalmente  
**BANCA EXAMINADORA**  
ALESSIO TONY BATISTA CELESTE  
Data: 18/02/2024 13:11:44-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Aléssio Tony Batista Celeste

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Orientador

Daniel Cesar De  
Ma\_c\_e\_d\_o

Assinado digitalmente por Daniel Cesar De Macedo  
Cavalcante ND: OU=Campus Serra Talhada, O=IFSertãoPE,  
CN=Daniel Cesar De Macedo Cavalcante,  
E=daniel.cesar@ifsertao-pe.edu.br Razão: Eu concordo com  
os termos definidos por minha  
assinatura neste documento Localização:  
Serra Talhada - PE  
Foxit PDF Reader Versão: 2023.3.0

Prof. Daniel César de Macedo Cavalcante

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Marcelo George  
Nogueira da Costa

06075146474

Assinado digitalmente por Marcelo George Nogueira da  
Costa 06075146474  
DN: CN=Marcelo George Nogueira da Costa: 06075146474,  
OU=IFSERTAOPE - Instituto Federal do  
Sertão Pernambucano, O=ICPEdu, C=BR  
Razão: Eu sou o autor deste documento  
Localização sua localização de assinatura aqui Data:  
2024.02.17 17:44:47-0300  
Foxit PDF Reader Versão: 11.1.0

Prof. Mr. Marcelo George Nogueira Da Costa

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** RENILTON CORREIA DA COSTA  
Data: 18/02/2024 12:38:39-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Renilton Correia da Costa

UFCG - Campus Pombal - Examinador Externo

## **DEDICATÓRIA**

Dedico a minha família, pois foram meus pais, irmãos e irmãs que me apoiaram e me deram suporte.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me deu forças para prosseguir em frente, diante das dificuldades encontradas e nunca desistir dos meus sonhos.

Aos meus pais, irmãos e irmãs, que são minha família, que sempre acreditaram em mim quando ia atrás de conhecimento buscando um ensino superior.

Aos meus amigos e amigas do curso de licenciatura em Física, que sempre me apoiaram e ajudaram dando incentivos ao longo do curso.

Ao professor Aléssio, que me aceitou para ser meu orientador no trabalho de conclusão do curso.

## RESUMO

Os métodos numéricos estão muito presentes na resolução de problemas complexos e foram melhorados com as criações de computadores com capacidade de resolver operações matemáticas em um curto intervalo de tempo. Essas máquinas têm um grande papel para contribuir na resolução de problemas físicos que não são possíveis de se resolver analiticamente. Dentre métodos numéricos, um dos mais utilizados para resoluções de equações diferenciais de 1ª ordem é o método de Runge-Kutta. Neste trabalho verificaremos a eficiência do método para resolver equações diferenciais de primeira e segunda ordem que aparecem nos sistemas físicos: circuito RL, circuito LC e movimento de um corpo em queda em um meio resistente. Foi realizada uma modificação no algoritmo para que o método pudesse resolver também equações diferenciais de 2ª ordem.

**Palavras-chave:** equações diferenciais; métodos numéricos; Runge-Kutta.

## **ABSTRACT**

Numerical methods are very present in the resolution of complex problems and have been improved with the creation of computers capable of solving mathematical operations in a short time interval, they have a great role in contributing to the resolution of physical problems that are not possible to solve. Solved analytically. One of the most used numerical methods for solving 1st order differential equations is the Runge-Kutta method. In this work we will verify the efficiency of the method to solve first and second order differential equations that appear in physical systems: RL circuit, LC circuit and movement of a falling body in a resistant medium. A modification was made to the algorithm so that the method could also solve 2nd order differential equations.

**Key-words:** equations differential; numerical methods; Runge-Kutta.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| <b>Figura 1</b> - Circuito RL..... | 18 |
| <b>Figura 2</b> - Circuito LC..... | 24 |

## LISTA DE GRÁFICOS

|   |    |
|---|----|
| Gráfico 1 - Representação Geométrica do RK-2.....   | 15 |
| Gráfico 2 - Representação Geométrica do RK-4.....   | 16 |
| Gráfico 3 - Representação Geométrica do RK-4.....   | 17 |
| Gráfico 4 - Circuito RL resultado obtido analiticamente da corrente versus tempo.....                                     | 19 |
| Gráfico 5 - Circuito RL resultado obtido numericamente pelo método RK-4 da corrente versus tempo.....                     | 20 |
| Gráfico 6 - Movimento com força resistiva resultado analítico da velocidade versus tempo.....                             | 22 |
| Gráfico 7 - Movimento com força resistiva resultado obtido numericamente pelo método de RK-4 velocidade versus tempo..... | 23 |
| Gráfico 8 - Circuito LC resultado obtido analiticamente da corrente versus tempo.....                                     | 26 |
| Gráfico 9 - Circuito LC resultado obtido numericamente pelo método de RK-4 corrente versus tempo.....                     | 26 |
| Gráfico 10 - Movimento com força resistiva resultado obtido analiticamente da posição versus tempo.....                   | 27 |
| Gráfico 11 - Movimento com força resistiva resultado obtido numericamente pelo método de RK-4 posição versus tempo.....   | 28 |

## SUMÁRIO

|           |   |       |
|-----------|---|-------|
| <b>1.</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | 12    |
| <b>2.</b> | <b>MÉTODO DE RUNGE-KUTTA</b> .....  | 13    |
| 2.1       | Runge-Kutta de Primeira Ordem.....  | 14    |
| 2.2       | Runge-Kutta de Segunda Ordem.....   | 14    |
| 2.3       | Runge-Kutta de Quarta Ordem.....  | 15    |
| <b>3.</b> | <b>EXEMPLOS EDOs DE 1ª ORDEM</b> .....  | 18    |
| 3.1       | Circuito RL.....  | 18    |
| 3.2       | Movimento em meio resistente - EDO em termos da velocidade.....                                 | 21    |
| <b>4.</b> | <b>EXEMPLOS EDOs DE 2ª ORDEM</b> .....  | 24    |
| 4.1       | Circuito LC.....  | 24    |
| 4.2       | Movimento em meio resistivo - EDO em termos da posição.....                                     | 27    |
| <b>5.</b> | <b>CONCLUSÃO</b> .....  | 29    |
|           | <b>REFERÊNCIAS</b> .....  | 30    |
|           | <b>ANEXO A - Código do Mathematica para o circuito RL (EDO 1ª ordem)</b> .....                  | 31    |
|           | <b>ANEXO B - Código do Mathematica para o movimento num meio resistivo (EDO 1ª ordem)</b> ..... | 32    |
|           | <b>ANEXO C - Código do Mathematica para o circuito LC (EDO 2ª ordem)</b> .....                  | 33-34 |
|           | <b>ANEXO D - Código do Mathematico para movimento num meio resistivo (EDO 2ª ordem)</b> .....   | 35    |

## 1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são um conjunto de aplicações de algoritmos utilizados para formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas. Os algoritmos, por sua vez, são grupos finitos de operações ordenadas nos quais nos permitem resolver certos problemas matemáticos. Trata-se de uma sequência de instruções ou regras estabelecidas que, por meio dessas etapas dadas, permitem-nos aproximar o resultado real de um problema dado.

A análise numérica é o estudo de algoritmos que buscam resultados numéricos de problemas das mais diferentes áreas do conhecimento humano, modelados matematicamente (ARAUJO, 2022).

Embora a análise numérica tenha sido concebido antes dos computadores, data-se que algumas civilizações muito antigas como os babilônios já faziam uso dos métodos numéricos para resolver certos problemas matemáticos e consta na história deles que usavam um tipo de tabuleta para aproximar resultados de problemas matemáticos.

Embora a análise numérica tenha sido criada bem antes dos computadores, ela está muito relacionada a assuntos de interdisciplinaridade entre problemas matemáticos e a tecnologia da informação, sendo mencionada muito na disciplina do cálculo numérico (ARAUJO, 2022).

Uma das aplicações dos métodos numéricos computacionais é a resolução de equações diferenciais, que têm um papel fundamental para toda a Física; algumas, muitas vezes, somos incapazes de resolver de maneira analítica, outras, damos por impossíveis (LYRA, 2018).

O método de Runge-Kutta é aplicado para a resolução de equações diferenciais de valores iniciais que possuem equações de primeira ordem. Os métodos numéricos como os métodos de Numerov, são capazes de resolver tanto como equações de ordem  $n$ , mas também é útil para resolução de uma equação de segunda ordem.

O método de Runge-Kutta é um dos mais conhecidos no cálculo, porque ele é utilizado para resoluções de equações diferenciais, o qual será empregado neste trabalho. O método de Runge-Kutta foi desenvolvido por volta do ano de 1895, pelos dois matemáticos alemães C.D.T. Runge e M.W. Kutta.

O objetivo deste trabalho é mostrar a eficiência do método de Runge-Kutta para resolução de equações diferenciais físicas. Tanto para equações de primeira ordem como de segunda ordem, que aparecem nos sistemas físicos: circuito RL, circuito LC e o movimento de um corpo em queda em meio resistente.

## 2. MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Os métodos numéricos de Runge-Kutta são um agrupamento de métodos iterativos implícitos e explícitos que formam uma família que serve para aproximação de resolução numérica usada para estimar valores de equações diferenciais ordinárias nos  $n$  primeiros termos da expansão da série de Taylor, trazendo a ideia de aproveitar melhor o método de Euler, de acordo com algumas propriedades:

- I. São métodos de passo único.
- II. Em vez disso, não calculam qualquer derivada de  $f(x, y)$ , mais calcula-se a derivada  $f(x, y)$  em vários pontos.

Os métodos de Runge-Kutta são similares à expansão dos polinômios de Taylor, onde se dão os nomes dos graus. Na nossa definição:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (1)$$

a equação Eq. (1) é a própria série de Taylor da função  $f$  em torno de  $a$ . Então devemos considera  $x - a = h$ , que é o passo utilizado para o método de Runge-Kutta, chamado  $n$  de  $k$  que define as inclinações das retas no RK. Em seguida, é descrita a forma mais simplificada e detalhada do Runge-Kutta de ordem 1 e 2, que são métodos semelhantes ao de Euler e o de Runge-Kutta de ordem 4, servindo para resolver problemas físicos envolvendo equações diferenciais através do aplicativo o software Mathematica<sup>®</sup> Versão 11.

## 2.1 RUNGE-KUTTA DE PRIMEIRA ORDEM

O método de Runge-Kutta de primeira ordem RK-1 é conhecido como o método de Euler, no qual usam-se de substituições, fazendo a expansão da série de Taylor, para  $k = n = 1$ , temos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f'(t_n, y_n)}{1!} h + \frac{f''(t_n, y_n)}{2!} h^2, \quad (2)$$

onde temos  $y_{n+1}$  é daí que obtemos o valor inicial de  $y_n$ . Já na aproximação para o termo de segunda ordem, que é  $h^2$  ser um valor muito pequeno, teremos a seguinte relação:

$$y_{n+1} = y_n + hf'(t_n, y_n), \quad (3)$$

ou

$$y_{n+1} = y_n + hk_1, \quad (4)$$

que é o método de Euler, citado anteriormente.

## 2.2 RUNGE-KUTTA DE SEGUNDA ORDEM

O método de Runge-Kutta de segunda ordem RK-2, muito conhecido como método de Euler, porém mais preciso que usa duas rotinas do seu algoritmo, mas mesmo assim é menos preciso que o Runge-Kutta de quarta ordem que usa quatro rotinas que são os valores  $K_1, K_2, K_3$  e  $K_4$ . É baseado na série de Taylor mais possui os seguintes algoritmos que são:

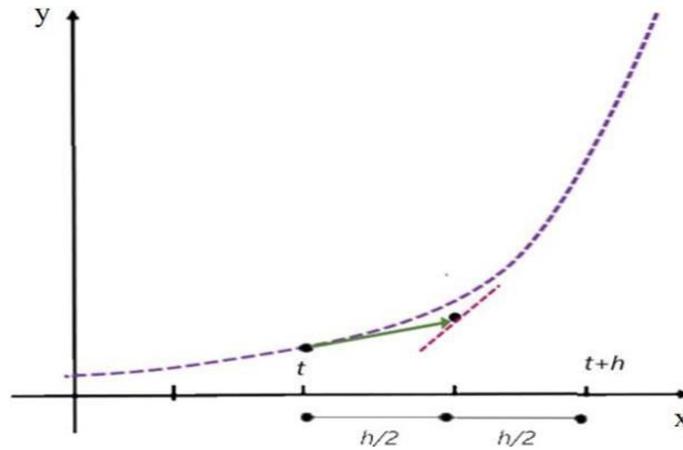
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad (5)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (6)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (7)$$

Percebe-se que no gráfico 1, o passo mostrado diz que “h” é reduzido pela metade, e a sua derivada se calcula em um novo ponto, com isso o nível do erro diminui e a aproximação da solução da equação será exata. Então do modo que as equações foram obtidas podemos encontrar a solução, por meio dos algoritmos desenvolvidos

Gráfico 1: Representação geométrica de Runge-Kutta de segunda ordem



### 2.3 RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

O método de Runge-Kutta para equações diferenciais de ordem 4 (RK-4) é um método muito difundido para o cálculo computacional, é nesse método utilizaremos como modelo para a criação do algoritmo no Software Mathematica, e sua formulação geral é:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (8)$$

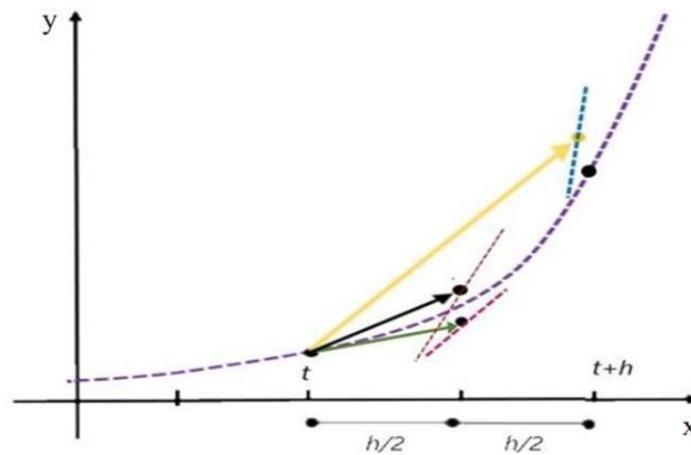
onde  $K_1$  e  $K_2$  são as equações (6) e (7), respectivamente e  $K_3$  e  $K_4$  são:

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (9)$$

$$K_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot K_3), \quad (10)$$

A interpretação geométrica do método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK-4) pode ser vista no gráfico 2.

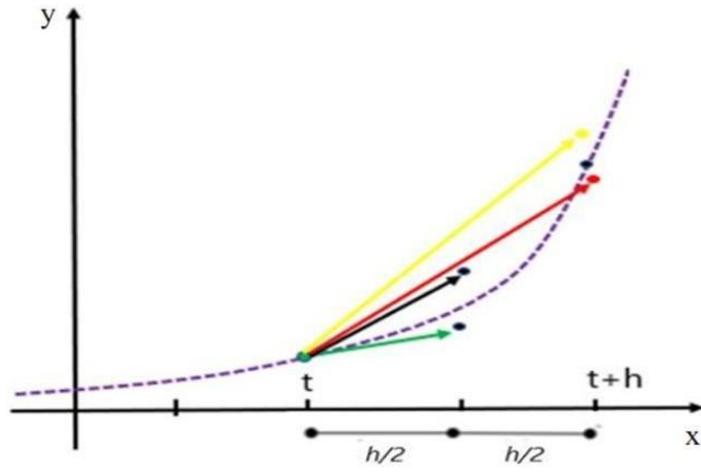
Gráfico 2: Representação geométrica de Runge-Kutta de quarta ordem



Então, podemos concluir que o método de Runge-Kutta de ordem 4 (RK-4), ele calcula as derivadas parciais em cada ponto no gráfico acima. Onde são indicado pelas setas coloridas que são os vetores  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ .

Então cada uma das retas mostradas no gráfico anterior é dada pelas inclinações  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$ . Estima-se o valor no ponto  $y$ , daí levando como ponto inicial o  $t$  e o  $h$  como nosso passo para começar, os vetores verde, preto e amarelo apontam para a direção do ponto que vai pertencer a cada uma dessas retas que possuem inclinações  $K_j$  como se apresenta no gráfico. Agora, preste atenção que o vetor vermelho do gráfico anterior, é o nosso vetor resultante de todas inclinações que apontam para o ponto que é mais próximo da solução exata analítica, e o que demonstra o pequeno erro do método de Runge-Kutta de ordem 4.

Gráfico 3: Representação geométrica do Runge-Kutta de quarta ordem



### 3. EXEMPLOS EDOs DE 1ª ORDEM

Neste capítulo, apresentaremos duas situações na física que surgem a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem. O primeiro exemplo é um sistema elétrico, o circuito RL, e será apresentado na seção 3.1. O segundo exemplo é um sistema mecânico, o movimento de uma partícula num meio resistivo, e será apresentado na seção 3.2.

#### 3.1 Circuito RL

Nesta seção analisamos um circuito RL, que é um circuito elétrico de malha única, onde todos os seus dispositivos estão ligados em série, constituído de um resistor e um indutor conforme mostra a Fig. 1 a seguir.

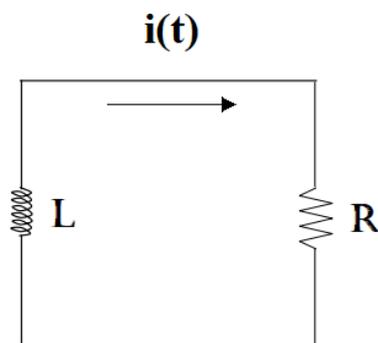


Figura 1: Circuito RL

Para analisar este circuito, podemos aplicar a lei das malhas de Kirchhoff ao circuito, seguindo o sentido da direção da corrente elétrica teremos

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (11)$$

onde  $R$  é o valor da resistência do resistor,  $L$  é a indutância do indutor. A Eq. (11) pode ser escrita ainda como

$$\frac{di}{i} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (12)$$

Essa equação diferencial ordinária de primeira ordem pode ser facilmente resolvida pelo método de separação de variáveis

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \Rightarrow \int_0^t \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln(i) = -\frac{R}{L}t + const. \quad (13)$$

para que a solução seja válida para  $t \geq 0$  a constante de integração deve ser escolhida pela

condição inicial, ou seja,  $i(0) = i_0$ . Aplicando-se a condição inicial na Eq. (13), teremos

$$\ln(i_0) = -\frac{R}{L} \cdot 0 + \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = \ln(i_0).$$

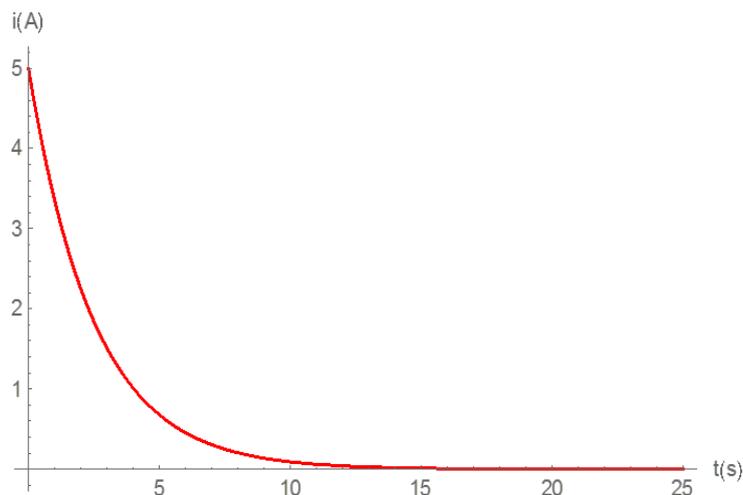
Substituindo o valor desta constante na Eq. (13), ficamos com a seguinte expressão

$$\ln(i) = -\frac{R}{L}t + \ln(i_0) \Rightarrow \ln(i) - \ln(i_0) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{R}{L}t,$$

$$i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (14)$$

Plotamos no Mathematica o gráfico dessa função Eq. (14) com o valores das constantes sendo  $i_0 = 10A$ ,  $R = 4\Omega$ ,  $L = 10H$ , o resultado é apresentado no gráfico (4).

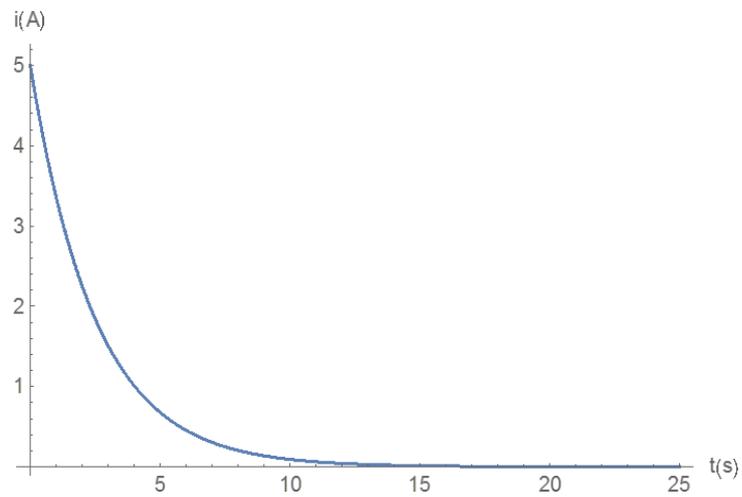
Gráfico 4: Resultado obtido analiticamente da corrente versus tempo para o circuito RL



Em seguida, resolvemos a equação diferencial da Eq. (12) pelo método de Runge-Kutta, o algoritmo está contido no Anexo I.

O gráfico obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com o valores das constantes sendo  $i_0 = 10A$ ,  $R = 4\Omega$ ,  $L = 10H$ , é apresentado no gráfico (5).

Gráfico 5: Resultado obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem da corrente versus tempo para o circuito RL



Percebemos pelos resultados dos dois gráficos que o resultado numérico coincide com o resultado analítico o que demonstra neste exemplo a eficiência do método de Runge-Kutta em resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem homogênea.

### 3.2 Movimento em meio resistivo - EDO em termos da velocidade

Nesta seção analisaremos um movimento de um corpo em queda em um meio resistente, dessa forma, além da força peso  $f_g = mg$ , vamos considerar a força de resistência do ar

$$f_b = -bv \quad (15)$$

onde  $b$  é uma constante positiva e que depende da forma geométrica do corpo e do meio onde ele vai se encontrar. Se considerarmos o corpo como uma partícula e o seu movimento em uma dimensão, podemos aplicar a segunda lei de Newton ficará da seguinte forma

$$mg - bv = ma \quad (16)$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{bv}{m} = g \quad (17)$$

como vemos, essa equação (17) é uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea com seus coeficientes constantes. Para resolver essa EDO faremos uso da técnica do fator de integração,

$$\alpha = \exp\left(\int_0^t p ds\right) = \exp\left(\int_0^t \frac{b}{m} ds\right) = \exp(bt/m) \Rightarrow \alpha = e^{bt/m}. \quad (18)$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrador Eq. (18), teremos

$$\begin{aligned} \alpha \frac{dv}{dt} + \alpha \frac{bv}{m} &= \alpha g \Rightarrow e^{bt/m} \frac{dv}{dt} + e^{bt/m} \frac{bv}{m} = e^{bt/m} g \Rightarrow \\ e^{bt/m} \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m} e^{bt/m} v &= g e^{bt/m} \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{bt/m} v) = g e^{bt/m}. \end{aligned}$$

Integrando o último resultado no tempo, encontramos

$$e^{bt/m} v = \frac{mg}{b} e^{bt/m} + k. \quad (19)$$

onde  $k$  é uma constante de integração. Dividindo a Eq. (19) por  $e^{bt/m}$ , encontramos

$$v(t) = \frac{mg}{b} + k e^{-bt/m}. \quad (20)$$

A fim de determinar a constante  $k$ , aplicamos a seguinte condição inicial  $v(0) = 0$  na Eq. (20), com isso

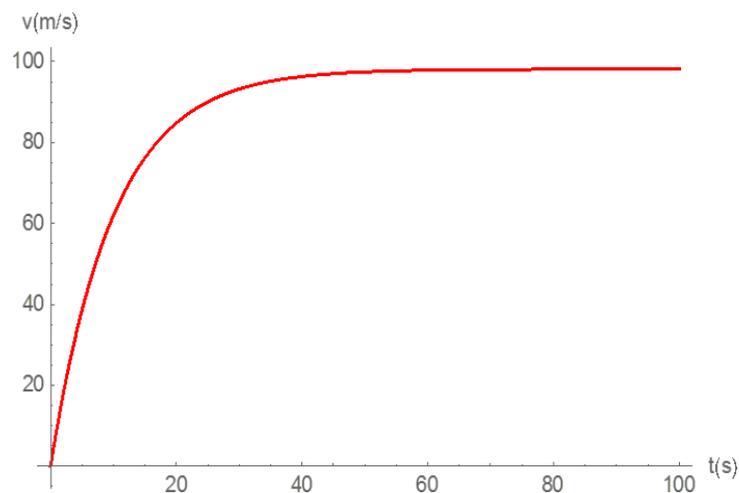
$$0 = \frac{mg}{b} + ke^{-b \cdot (0)/m} \Rightarrow k = -\frac{mg}{b}. \quad (21)$$

Finalmente, a solução da EDO da Eq. (17) é escrita como

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}). \quad (22)$$

Plotamos no Mathematica o gráfico dessa função Eq. (22) com o valores das constantes como sendo massa  $m = 2\text{kg}$ , aceleração da gravidade  $g = 9,8\text{m/s}^2$ , constante de amortecimento da força resistiva  $b = 0,2 \text{Ns}^2/\text{m}$ . O resultado é apresentado no gráfico (6).

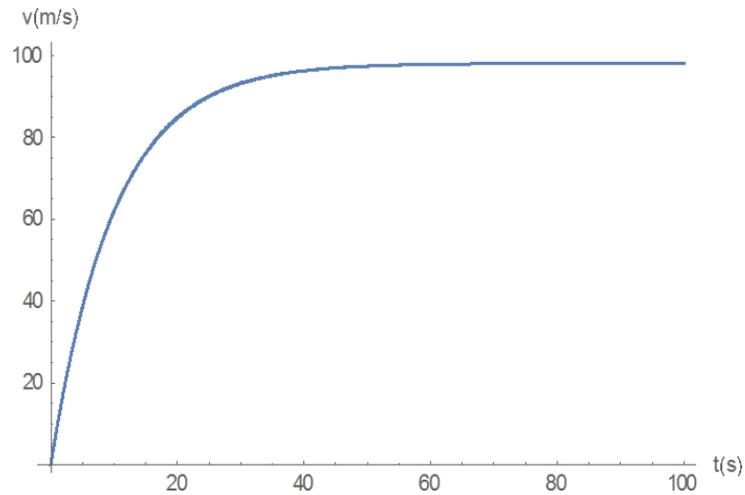
Gráfico 6: Resultado obtido analiticamente da velocidade versus tempo para o movimento com força resistiva



Em seguida, resolvemos a equação diferencial da Eq. (17) pelo método de Runge-Kutta, o algoritmo está contido no Anexo II.

O gráfico obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com o valores das constantes sendo  $m = 2\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{m/s}^2$  e  $b = 0,2 \text{Ns}^2/\text{m}$  está apresentado no Gráfico 7.

Gráfico 7: Resultado obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem da velocidade versus tempo para o movimento com força resistiva



Então, percebemos, pelos dois métodos dos dois gráficos, que o resultado numérico coincide com o resultado analítico, o que demonstra, neste exemplo, a eficiência do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, em resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem não homogênea com seus coeficientes constantes.

#### 4. EXEMPLOS EDOs DE 2ª ORDEM

Neste capítulo, apresentaremos duas situações na física que surgem para a resolução de uma equação diferencial de segunda ordem. O primeiro exemplo é um sistema elétrico, o circuito LC, e será apresentado na seção 4.1. O segundo exemplo é o sistema mecânico descrito na seção 3.2, o movimento de uma partícula num meio resistivo. Aqui iremos encontrar a EDO em termos da posição e será apresentado na seção 4.2.

##### 4.1 Circuito LC

Consideramos o circuito LC da Figura 2 com o capacitor inicialmente carregado.

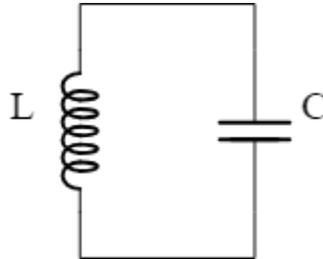


Figura 2: Circuito LC.

Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões em torno da malha do circuito, começando no canto inferior esquerdo e circulando no sentido horário, teremos

$$V_C + V_L = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0, \quad (23)$$

derivando em relação ao tempo, e sabendo que  $i = dQ/dt$ , obtemos

$$\frac{i}{C} + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0. \quad (24)$$

que é uma equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem, onde a constante é dada por  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Observe que a Eq. (24) é idêntica a equação de um oscilador harmônico de frequência angular  $\omega_0$ . Existem duas soluções independentes e a solução geral é uma combinação linear dessas duas soluções, mostradas a seguir:

$$i_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad i_2(t) = \sin(\omega_0 t). \quad (25)$$

A solução geral é dada por

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$i(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (25)$$

note que  $c_1 = A \cos \varphi$  e  $c_2 = -A \sin \varphi$ , onde foi usada a identidade trigonométrica  $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)$ . As constantes  $A$  e  $\varphi$  são obtidas pelas condições iniciais. Para determiná-las primeiro podemos integrar a Eq. (25) para obter uma expressão para a carga elétrica, ficamos com

$$Q(t) = \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (26)$$

A carga inicial e a corrente inicial no capacitor, em  $t = 0$ , é obtido das Eqs. (25) e (26), então

$$i(0) = i_0 = A \cos \varphi, \quad (27)$$

$$Q(0) = Q_0 = \frac{A}{\omega_0} \sin \varphi. \quad (28)$$

Temos, portanto, um sistema de duas equações e duas incógnitas  $A$  e  $\varphi$ . Resolvendo este sistema, encontramos as seguintes expressões para as constantes

$$A = \sqrt{i_0^2 + \omega_0^2 Q_0^2}, \quad (29)$$

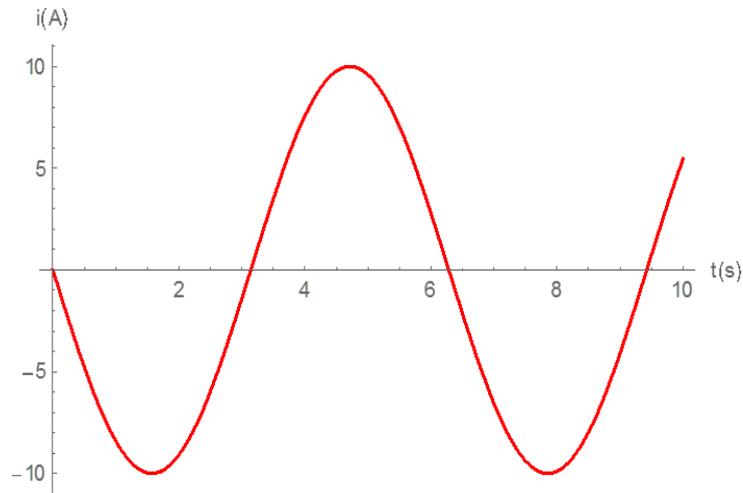
$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_0 Q_0}{i_0} \right). \quad (30)$$

Se em  $t = 0$  não há corrente, isto é  $i_0 = 0$ , e a carga  $Q_0$  está toda concentrada no capacitor, temos  $A = \omega_0 Q_0$  e  $\varphi = \pi/2$ . Nestas condições a Eq. (25) fica

$$i(t) = \omega_0 Q_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2) \Rightarrow i(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t). \quad (31)$$

Plotamos no Mathematica o gráfico da função da Eq. (31) com o valores das constantes como sendo  $L = 0,20H$ ,  $C = 5F$ ,  $Q_0 = 10C$ . O resultado é apresentado no Gráfico 8.

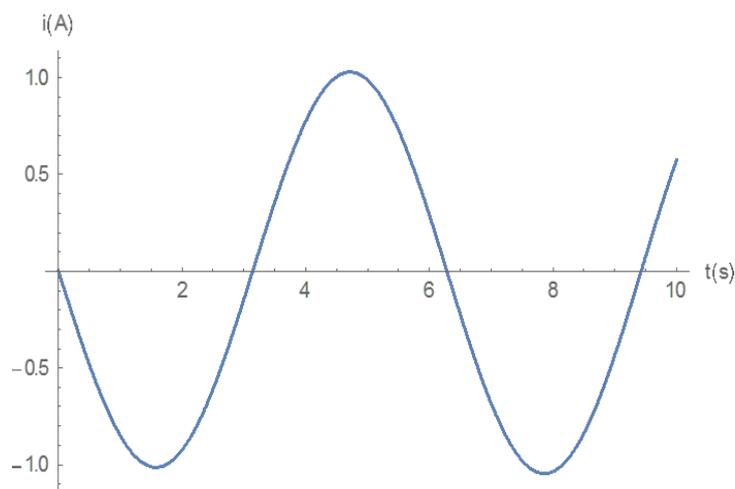
Gráfico 8: Resultado obtido analiticamente da corrente versus tempo para o circuito LC



Em seguida, resolvemos a equação diferencial da Eq. (24) pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem, o código está contido no Anexo III.

O gráfico obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com o valores das constantes sendo  $L = 0,20H$ ,  $C = 5F$ ,  $Q_0 = 10C$ , ou seja, as mesmas usadas no resultado analítico, com isso o resultado numérico é apresentado no Gráfico 9.

Gráfico 9: Resultado obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem da corrente versus o tempo para o circuito LC.



Então, percebemos mais uma vez que o resultado numérico quanto o analítico dos dois gráficos são próximos o que demonstra neste exemplo a eficiência do método de Runge-Kutta em resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, da corrente versus tempo para o circuito LC.

## 4.2 Movimento em meio resistivo - EDO em termos da posição

Reescrevendo a Eq. (17) em termos da posição, ficamos com a seguinte equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = g. \quad (32)$$

Como na situação da seção 3.2 Considerando as constantes que aparecem na Eq. (32) como sendo massa  $m = 2\text{kg}$ , aceleração da gravidade  $g = 9,8\text{m/s}^2$ , constante de amortecimento da força resistiva  $b = 0,2 \text{Ns}^2/\text{m}$ . Com isso, a solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea acima é dada por

$$x(t) = 98,1t - 10k_1e^{-0,1t} + k_2, \quad (33)$$

onde as constantes  $k_1$  e  $k_2$  são determinadas pelas condições iniciais. A partir da Eq. (33) obtemos a velocidade,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 98,1 + k_1e^{-0,1t}. \quad (34)$$

Utilizando-se das seguintes condições iniciais,  $x(0) = 0$  e  $v(0) = 0$ , obtemos o sistema de equações

$$x(0) = -10k_1 + k_2 = 0, \quad (35)$$

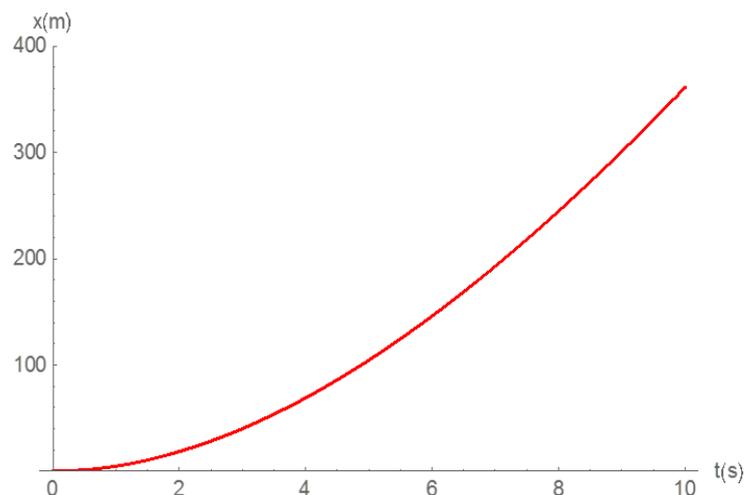
$$v(0) = 98,1 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -98,1. \quad (36)$$

Substituindo o valor de  $k_1$  da Eq. (36) na Eq. (35) encontramos  $k_2 = -981$ . Portanto, a solução da Eq. (33) pode ser escrita como

$$x(t) = 98,1t - 981(1 - e^{-0,1t}). \quad (34)$$

O resultado desta função é apresentado no Gráfico 10.

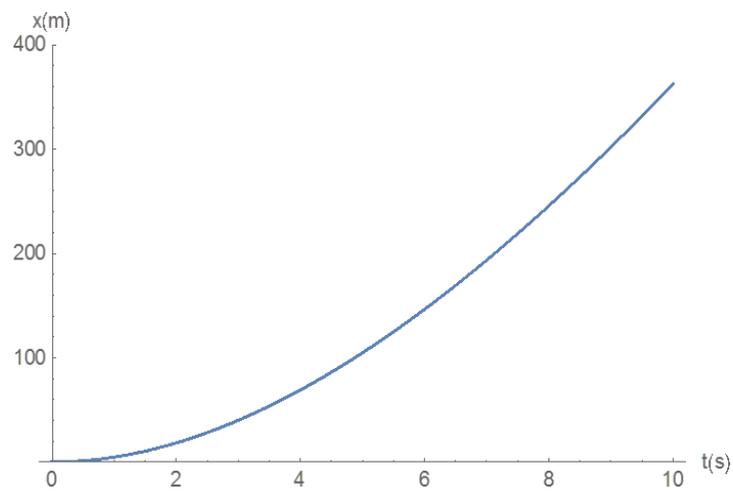
Gráfico 10: Resultado obtido analiticamente da posição versus tempo para o movimento com força resistiva



Em seguida, resolvemos a equação diferencial da Eq. (32) pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, o código está contido no Anexo IV.

O gráfico obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem com o valores das constantes sendo  $m = 2\text{kg}$ ,  $g = 9,8\text{m/s}^2$  e  $b = 0,2 \text{Ns}^2/\text{m}$  está apresentado no Gráfico 11.

Gráfico 11: Resultado obtido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem da posição versus tempo para o movimento com força resistiva



## 5. CONCLUSÃO

Fazendo o uso do aplicativo software Mathematica, foi possível aplicar o método número de Runge-Kutta tanto para equações diferenciais primeira ordem (RK-1), equações diferenciais de segunda ordem (RK-2) e equações diferenciais de quarta ordem (RK-4). Em problemas físicos, como circuito RL, circuito LC e o movimento num meio resistivo para equações diferenciais lineares. Aplicando o método de Runge-Kutta de ordem 4, vemos sua eficácia para resoluções de problemas físicos tanto para método de Runge-Kutta de primeira (RK-1), segunda ordem (RK-2) e quarta ordem (RK-4) de forma analítica como de forma numérica.

Os resultados, que contribuíram neste trabalho, mostraram a eficiência da resolução de problemas físicos, que, na maioria das vezes demandam um breve conhecimento matemático, mas que também às vezes isso não é o suficiente. Então, com o uso do aplicativo software Mathematica, foi possível mostrar sua eficiência da resolução tanto de forma analítica como numérica, e seu passo a passo como toda manipulação algébrica, seus gráficos e sua solução exata em problemas físicos que são muito complexos.

Neste trabalho, limitou-se mostrar a aplicação do método de Runge-Kutta (RK-1, RK-2 e RK-4) como sua eficiência em problemas de circuito RC, circuito LC e movimento em um meio resistivo de equações diferenciais lineares homogêneas com certas condições específicas, mas que também devemos reconhecer que existem outras áreas do ramo da física em que estes se aplicam. Por isso, é possível a aplicação do método de Runge-Kutta para problemas que envolvam, por exemplo, eletromagnetismo, oscilações livres num circuito RL, oscilações livres num circuito LC, como em sistemas da mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana “movimento em um meio resistivo” e etc.

O estudo deste trabalho foi desenvolvido a partir de diálogos com o professor orientador, buscando mostrar a eficiência dos métodos numéricos de Runge-Kutta e suas vastas aplicações no ramo da física, engenharia e sua presença mercado de simulações computacionais na resolução de problemas com soluções tanto numérica como analítica.

## REFERÊNCIAS

- ARAUJO, Eduardo. BLOG / MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SIMULAÇÃO NA ENGENHARIA. 30 de novembro de 2017. Disponível em: <https://www.esss.co/blog/metodos-numericos-para-simulacao-na-engenharia/>. Acesso em: 23/06/2023.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. Fundamentos de Física: Eletromagnetismo Volume 3. 10ª edição. Editora LTC, 2016. ISBN 978-1-118-23073-2.
- HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica Volume 2. 10ª edição. Editora LTC, 2016. ISBN 978-85-216-3036-4
- KINZEL, Wolfgang; REENTS, Georg. Physics by computer: Programming Physical Problems Using Mathematica and C. [S. l.: s. n.], 1996. ISBN 3-540-62743- X. .
- LIMA, Carla Claudiane De. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA EM SISTEMAS MECÂNICOS NO ESPAÇO DE FASE. Orientador: Prof. Aléssio T. B. Celeste. 2021. 33f. TCC (Licenciatura em física) - IFSERTÃOPE/Serra Talhada, Serra Talhada/PE, 2021.
- LOBÃO, Diomar Cesar. INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS. Volta Redonda/RJ, 2017. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/diomarcesarlobao/wpcontent/uploads/sites/85/2017/09/note6.pdf>. Acesso em: 24 dez. 2022.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica – volume 1: mecânica. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica – vol. 2: fluidos, oscilações e ondas, Calor. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2014.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica – vol. 3: eletromagnetismo. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2015.
- STERZA, R. L.; BRANDI, A. C. Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 7, p. 12-22, dez. 2016. Edição ERMAC. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matemática/revista-cqd/>
- THORNTON, Stephen; MARION, Jerry. Dinâmica clássica de partículas e sistemas. 1. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2011. 608 p. ISBN 8522109060.

## ANEXO A - Código do Mathematica para o circuito RL (EDO 1ª ordem)

(\* Valor da resistência \*)

$R = 4;$

(\* Valor da indutância \*)

$L_i = 10;$

(\* Intervalo de varredura e tamanho do passo \*)

$a = 0;$

$b = 25;$

$h = 0.01;$

(\* "Fatiamento" do intervalo \*)

$L = (b-a)/h;$

(\* Condição inicial \*)

$y[0] = 5;$

$F[x_,y_] = - (R/L_i)y;$

(\* Algoritmo do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem \*)

Do[ $x[n]=n*h, \{n,0,L\}$ ]

Do[

$k_1=h*F[x[n],y[n]],$

$k_2=h*F[x[n] + h/2, y[n] + k_1/2],$

$k_3=h*F[x[n] + h/2, y[n] + k_2/2],$

$k_4=h*F[x[n] + h, y[n] + k_3],$

$y[n+1]=y[n] + (k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6),$

$\{n,0,L\}$ ]

GraficoN=ListLinePlot[Table[ $\{x[n],y[n]\}, \{n,0,L\}$ ], AxesLabel->{t,i}, PlotRange->All]

## ANEXO B - Código para o movimento num meio resistivo (EDO 1ª ordem)

(\* Intervalo de varredura e tamanho do passo \*)

a = 0;

b = 100;

h = 0.01;

(\* "Fatiamento" do intervalo \*)

L = (b-a)/h;

(\* Constantes físicas \*)

m = 2;

g = 9.81;

b = 0.2;

(\* Condição inicial \*)

y[0] = 0;

(\* EDO de primeira ordem \*)

F[x\_,y\_] = g - (b/m)y;

(\* Algoritmo do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem \*)

Do[x[n] = n\*h, {n,0,L}]

Do[{

k1 = h\*F[x[n],y[n]],

k2 = h\*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2],

k3 = h\*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2],

k4 = h\*F[x[n]+h,y[n]+k3],

y[n+1] = y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)},

{n,0,L}]

GraficoN = ListLinePlot[{Table[{x[n],y[n]},{n,0,L}]}]

### ANEXO C - Código do Mathematica para o circuito LC (EDO 2ª ordem)

(\* Intervalo de varredura e tamanho do passo \*)

a = 0;

b = 5;

h = 0.01;

L = (b-a)/h;

(\* Frequência angular \*)

$\omega_0=1$ ;

(\* Algoritmo do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para as duas funções \*)

Do[x[n] = n\*h, {n,0,L}]

y[0] = 0;

z[0] = 1;

F[x\_,y\_,z\_] = z;

G[x\_,y\_,z\_] = -  $\omega_0^2$  y;

Do[{

k1 = h\*F[x[n], y[n],z[n]],

t1 = h\*G[x[n], y[n],z[n]],

k2 = h\*F[x[n] + h/2, y[n] + k1/2, z[n] + k1/2],

t2 = h\*G[x[n] + h/2, y[n] + t1/2, z[n] + t1/2],

k3 = h\*F[x[n] + h/2, y[n] + k2/2, z[n] + k2/2],

t3 = h\*G[x[n] + h/2, y[n] + t2/2, z[n] + t2/2],

k4 = h\*F[x[n] + h, y[n] + k3, z[n] + k3],

$$t4 = h * G[x[n] + h, y[n] + t3, z[n] + t3],$$

$$y[n+1] = y[n] + (k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6),$$

$$z[n+1] = z[n] + (t1/6 + t2/3 + t3/3 + t4/6),$$

$$\{n, 0, L\}$$

$$\text{GraficoN} = \text{ListLinePlot}[\{\text{Table}\{x[n], y[n]\}, \{n, 0, L\}\}]$$

### ANEXO D - Código para o movimento num meio resistivo (EDO 2ª ordem)

```

a = 0;
b = 5;
h = 0.01;
L = (b - a)/h;
m = 2;
g = 9.81;
ba = 0.2;
Do[x[n] = n*h, {n, 0, L}]
y[0] = 0;
z[0] = 0;
F[x_, y_, z_] = z;
G[x_, y_, z_] = g - (ba/m) z;
Do[{
k1 = h*F[x[n], y[n], z[n]],
t1 = h*G[x[n], y[n], z[n]],
k2 = h*F[x[n] + h/2, y[n] + k1/2, z[n] + k1/2],
t2 = h*G[x[n] + h/2, y[n] + t1/2, z[n] + t1/2],
k3 = h*F[x[n] + h/2, y[n] + k2/2, z[n] + k2/2],
t3 = h*G[x[n] + h/2, y[n] + t2/2, z[n] + t2/2],
k4 = h*F[x[n] + h, y[n] + k3, z[n] + k3],
t4 = h*G[x[n] + h, y[n] + t3, z[n] + t3],
y[n+1] = y[n] + (k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6),
z[n+1] = z[n] + (t1/6 + t2/3 + t3/3 + t4/6)},
{n, 0, L}]
GraficoN = ListLinePlot[{Table[{x[n], y[n]}, {n, 0, L}], PlotRange -> {0, 400}, AxesLabel -
> {t, x}]

```