



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SERTÃO  
PERNAMBUCANO  
CAMPUS SERRA TALHADA**

LEONARDO DE LIMA SOUZA

**MODELOS ATÔMICOS DE THOMSON E RUTHERFORD**

SERRA TALHADA-PE

2022

LEONARDO DE LIMA SOUZA

## **MODELOS ATÔMICOS DE THOMSON E RUTHERFORD**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

SERRA TALHADA-PE

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

S719 Souza, Leonardo de Lima.

Modelos Atômicos de Thomson e Rutherford / Leonardo de Lima Souza. - Serra Talhada, 2022.

37 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Alessio Tony Batista Celeste.

1. Física. 2. Modelos atômicos. 3. Espalhamento. 4. Partícula-alfa. I. Título.

CDD 530

---

Gerado automaticamente pelo sistema Geficat, mediante dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LEONARDO DE LIMA SOUZA

## MODELOS ATÔMICOS DE THOMSON E RUTHERFORD

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do curso de Licenciatura em  
Física do Instituto Federal de Educação,  
Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano,  
Campus Serra Talhada, como requisito parcial  
à obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado em: 07/12/2022.

### BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente  
 ALESSIO TONY BATISTA CELESTE  
Data: 07/02/2023 16:08:14-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Aléssio Tony Batista Celeste

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Orientador

Daniel Cesar De Macedo  
Cavalcante

Assinado de forma digital por Daniel Cesar De  
Macedo Cavalcante  
Dados: 2023.01.30 10:07:49 -03'00'  
Versão do Adobe Acrobat Reader: 2022.003.20314

Prof. Daniel César de Macedo Cavalcante

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Sarah Soares  
Damasceno

Assinado de forma digital por  
Sarah Soares Damasceno  
Dados: 2023.02.07 09:56:20  
-02'00'

Profa. Sarah Soares Damasceno

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Daniel Berg de Amorim  
Lima:08623314476

Daniel Berg de Amorim Lima:08623314476  
Coordenação de Lic em Física - Campus  
Petrolina  
P 2023-01-27 11:22:55

Prof. Daniel Berg de Amorim Lima

IFSertãoPE – Campus Petrolina - Examinador Externo

## DEDICATÓRIA

Dedico todo o esforço que depositei neste trabalho à minha família, à professor e à Dra. Luana sequeira que confiaram nas minhas competências e me apoiaram no momento mais difícil, de forma incondicional, em toda a trajetória estudantil.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus que, através da força do seu espírito, fez-me superar as dificuldades encontradas no caminho e para que pudesse desenvolver este trabalho.

Aos meus pais, irmão e irmã que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu buscava os meus objetivos.

Aos meus amigos e amigas que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio, demonstrando ao longo de todo o período de tempo de dedicação.

Aos professores dos quais fui aluno, desde o ensino médio até a graduação. Em essencial à professora Juliana Mato que contribuiu significativamente.

Ao meu orientador professor Aléssio Tony Batista Celeste pelo auxílio na execução deste trabalho, por contribuir significativamente para minha formação e pela confiança depositada na minha pessoa.

A todos que fazem parte da coordenação do curso de Licenciatura em Física, em nome do professor Daniel Cesar De Macedo Cavalcante, pelo apoio que tive em todo o trajeto do curso.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Serra Talhada, pela oportunidade de realização do curso de Licenciatura em Física.

## RESUMO

Neste trabalho discutiremos a inviabilidade matemática existente no modelo atômico de Thomson em explicar dois resultados experimentais importantes. O primeiro está relacionado com o espectro de emissão visível do átomo de hidrogênio, o segundo no experimento com partículas alfa por uma lâmina de ouro realizado por Geiger e Marsden. Neste experimento, foi observado que partículas eram espalhadas com grandes ângulos de espalhamento, fato que não pode ser explicado utilizando o modelo de Thomson. Em seguida, apresentaremos um modelo para o átomo idealizado por Rutherford para tentar explicar a existência desses grandes ângulos de espalhamento. Ele imaginou que o átomo teria um 'núcleo' mais consistente e de carga positiva, e que em torno dele orbitam os elétrons em movimento circular e de carga negativa. Deduzimos a equação no número de partículas espalhadas e que conseguiu corrigir e explicar os resultados experimentais. Por fim, comparamos a partir de um gráfico as equações do número de partículas nos dois modelos estudados neste trabalho.

**Palavras-chave:** modelos atômicos; espalhamento; partícula- $\alpha$ .

## ABSTRACT

In this work we will discuss the mathematical infeasibility existing in the Thomson atomic model in explaining two important experimental results. The first is related to the visible emission spectrum of the hydrogen atom, the second to the experiment with alpha particles by a slide of gold carried out by Geiger and Marsden. In this experiment, it was observed that particles were scattered with large scattering angles, a fact that cannot be explained using the Thomson model. Next, we will present a model for the atom designed by Rutherford to try to explain the existence of these large scattering angles. He imagined that the atom would have a more consistent and positively charged 'nucleus', and that electrons orbit in circular motion and with negative charge around it. We deduced the equation in the number of particles scattered and which managed to correct and explain the experimental results. Finally, we compared the particle number equations in the two models studied in this work using a graph.

**Key-words:** atomic model; scattering; particle- $\alpha$ .

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Modelo atômico "pudim de passas" idealizado por J.J.Thompson.....	13
<b>Figura 2</b> - Espectro de emissão do átomo de Hidrogênio.....	14
<b>Figura 3</b> - Experimento espalhamento de partículas- $\alpha$ .....	17
<b>Figura 4</b> - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$ no modelo de Thomson.....	17
<b>Figura 5</b> - Número de partículas alfa espalhadas pelo alvo em função do ângulo de espalhamento total no modelo de Thomson .....	18
<b>Figura 6</b> - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$ na superfície de um átomo .....	19
<b>Figura 7</b> - Deflexão máxima na superfície de um átomo.....	20
<b>Figura 8</b> - Modelo atômico idealizado por E. Rutherford.....	21
<b>Figura 9</b> - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$ pelo núcleo atômico no modelo de Rutherford .....	21
<b>Figura 10.</b> Folha de ouro de área de espessura $t$ . Os anéis formados entre $b$ e $b + db$ são centrados sobre os núcleos.....	22
<b>Figura 11.</b> Número de partículas alfa espalhadas pelo alvo em função do ângulo de espalhamento total no modelo de Rutherford.....	26
<b>Figura 12.</b> Comparação do número de partículas espalhadas entre os modelos atômicos de Thomson e Rutherford.....	27

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Comprimentos de onda emitidos pelo átomo de Hidrogênio no espectro visível .....	14
---	----

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>13</b>
2.1 Resultados experimentais.....	14
2.2 O problema na frequência emitida pelo átomo de hidrogênio.....	15
2.3 Evidência Experimental no espalhamento de partículas alfa.....	16
2.4 Cálculos teóricos no espalhamento de partículas.....	18
<b>3. MODELO DE RUTHERFORD.....</b>	<b>21</b>
3.1 O átomo de Rutherford.....	21
3.2 O espalhamento de Rutherford.....	23
<b>4. CONCLUSÃO.....</b>	<b>28</b>
<b>5. REFERÊNCIAS.....</b>	<b>29</b>
<b>ANEXO A - Constantes físicas e químicas utilizadas neste TCC.....</b>	<b>30</b>
<b>ANEXO B - Cálculos usados no modelo de Thomson.....</b>	<b>31</b>
<b>ANEXO C - Cálculos usados no modelo de Rutherford.....</b>	<b>37</b>

## 1. INTRODUÇÃO

No estudo inicial de Química é comum alguns livros didáticos (Martha Reis, 2013; Mortimer *et al.*, 2013) abordarem os primórdios da teoria atômica apresentando alguns modelos para o átomo. No entanto, na maioria das vezes, essa abordagem é bem sucinta e sem muitos detalhes. Diante disso, procuramos fazer neste trabalho de conclusão de curso, suprir a ausência de detalhes no assunto de modelos atômicos nos livros didáticos do ensino médio. Apresentaremos a sua inviabilidade matemática e a comprovação experimental que confirmou a incapacidade do modelo de Thomson em explicar os resultados experimentais obtidos.

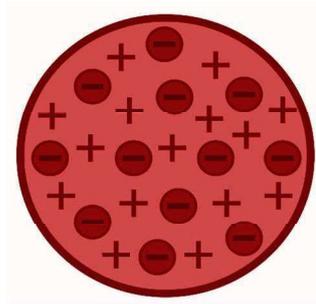
Sir Joseph John Thomson (1856-1940) foi um cientista britânico do famoso Laboratório Cavendish, em Cambridge e ganhador do prêmio Nobel de física em 1906 por ter mostrado que o elétron é uma partícula, medindo a razão carga-massa do elétron num tubo de raios catódico; vale destacar que o seu filho George Paget Thomson ganhou o prêmio Nobel de física em 1937 por ter mostrado que o elétron é uma onda a partir de experimentos com difração de elétrons. O pai, J. J. Thomson chegou às suas conclusões em 1897 com o estudo de raios catódicos.

Os raios catódicos usados por Thomson são basicamente descargas elétricas produzidas por uma alta tensão num tubo de Crookes que contém um gás rarefeito. Muito antes da estrutura atômica ter sido confirmada suspeitava-se que os átomos tinham uma estrutura interna formada por partículas carregadas. Antes de 1900 várias outras evidências desta suspeita foram verificadas, como por exemplo, a experiência de Faraday sobre eletrólise, que detectava a presença de partículas carregadas, ou íons, em soluções. As experiências com raios catódicos marcaram o início do entendimento da estrutura atômica.

Antes do modelo de Thomson, a ideia de representação do átomo se deve ao modelo de John Dalton (1766-1844), onde o átomo era representado por uma partícula esférica maciça e indivisível. Segundo Thomson, o átomo seria eletricamente neutro e considerado como uma espécie de fluido com uma distribuição esférica contínua de massa e de carga elétrica positiva, com diâmetro da ordem de  $10^{-10}$  m (1 angstrom), onde estariam inseridos os elétrons ("corpúsculos", como chamava Thomson) com carga elétrica negativa em anéis concêntricos. A hipótese de Thomson para que a esfera positiva fosse não maciça se deve a ideia de que os elétrons poderiam vibrar em torno de suas posições de equilíbrio, o que representaria o átomo excitado. Na situação onde os elétrons estivessem fixos na posição de equilíbrio o átomo estaria no seu estado fundamental. A idealização de um modelo para o átomo com elétron vibrando em torno de uma posição de equilíbrio explicaria qualitativamente a emissão de radiação por átomos excitados, pois de acordo com o eletromagnetismo uma partícula acelerada deve emitir

radiação. Thomson usou esse fato para tentar explicar os resultados experimentais do espectro de emissão de alguns elementos químicos. Devido a repulsão mútua, os elétrons estariam uniformemente distribuídos sobre a esfera positiva. Esse modelo ficou conhecido como "pudim de passas" e está ilustrado na Figura 1, onde as esferas menores em marrom representam os elétrons com cargas elétricas negativas e a esfera maior possui carga positiva.

**Figura 1-** Modelo atômico "pudim de passas" idealizado por J. J. Thomson.



**Fonte:** Autoria própria, 2022

*atômico "pudim de passas" idealizado por J. J. Thomson.* A vantagem do modelo de Thomson é que ele admite a existência de elétrons, a neutralidade do átomo e explicar qualitativamente a emissão de radiação eletromagnética por átomos excitados.

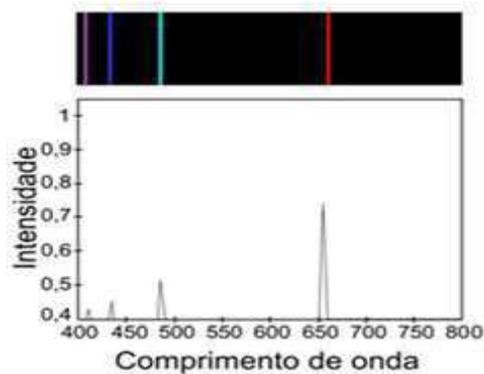
## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos apresentar algumas das dificuldades teóricas encontradas no modelo atômico de Thomson em tentar explicar alguns resultados experimentais.

### 2.1 Resultados experimentais

Em 1802 Joseph von Fraunhofer observou linhas espectrais quando a luz solar era separada por um prisma. No final do século XIX, antes do modelo atômico de Thomson ter sido proposto, não haviam explicações para as observações experimentais do espectro de emissão do elemento químico hidrogênio (H). Como sabemos o hidrogênio é o primeiro elemento da tabela periódica e é formado por um próton e um elétron. Na Figura 2 são mostradas as linhas espectrais na região do visível emitidas pelo átomo de hidrogênio.

**Figura 2-** Espectro de emissão do átomo de Hidrogênio.



**Fonte:** [http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aula\\_espec.htm](http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aula_espec.htm)

Na tabela 1 estão listadas as quatro raiais do espectro visível do hidrogênio da Figura 2. Cada raia é identificada por sua cor, seu nome, seu comprimento de onda ( $\lambda$ ).

**Tabela 1** - Comprimentos de onda emitidos pelo átomo de Hidrogênio no espectro visível

<b>Cor</b>	<b><math>\lambda</math> (em <i>angstrom</i>)</b>
Vermelho	6563
Verde	4858
Azul	4340
Violeta	4101

Usaremos o modelo de Thomson para explicar o espectro de emissão do hidrogênio usando as leis da física conhecidas na época do modelo. Não se sabia que o hidrogênio possuía apenas um elétron, pelo contrário, Thomson acreditava que o hidrogênio possuía milhares de elétrons distribuídos uniformemente na forma de anéis em torno do centro da esfera positiva. Nos cálculos que se seguem serão usados as constantes físicas e químicas contidas no Anexo A.

## 2.2 O problema na frequência emitida pelo átomo de hidrogênio

Nesta seção mostraremos um problema encontrado ao tentar explicar a frequência emitida pelo átomo de hidrogênio a partir do modelo de Thomson.

Considere um átomo de Thomson com apenas um elétron (átomo de H), e que o elétron esteja a uma distância  $r = a$  do centro do átomo. A força elétrica devido à esfera positiva sobre o elétron é obtida a partir da lei de Coulomb, sua magnitude é dada pela expressão

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (1)$$

onde  $q_1 = e$  é a carga do elétron e  $q_2 = (4/3\pi a^3)\rho_+$  é a carga elétrica na região  $r \leq a$  da esfera positiva,  $\rho_+$  é a densidade volumétrica de carga positiva, isto é, carga por unidade de volume. O sinal "menos" indica que a força radial aponta para o centro da esfera positiva. A densidade de carga pode ser encontrada usando o valor médio do raio atômico  $r_A$  e sabendo que o átomo é eletricamente neutro, temos:

$$\rho_+ = \frac{e}{(4/3)\pi r_A^3} \quad (2)$$

Observe que "e" e " $(4/3)\pi r_A^3$ ", são a carga elétrica e o volume total da esfera positiva, respectivamente. Reescrevendo a equação (1) para a força coulombiana substituindo as expressões de  $q_1$  e  $q_2$ , então,

$$\vec{F} = -\frac{\rho_+ e}{3\epsilon_0} \vec{r} = -k\vec{r}, \quad (3)$$

veja que o resultado anterior representa a equação de um oscilador harmônico simples. No anexo B é mostrado os cálculos da frequência  $\nu$  de oscilação do elétron sobre a esfera positiva. Tal frequência é dada por

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_A^3}} \approx 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}. \quad (4)$$

O comprimento de onda  $\lambda$  da onda emitida pelos elétrons é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 118nm. \quad (5)$$

Com isso, obtemos uma frequência da ordem  $\nu \approx 10^{15} Hz$  que representaria uma estimativa da frequência de emissão de luz por um átomo composto de apenas um elétron. “Neste caso, a onda ("fóton") emitida pelo elétron oscilando no interior do átomo estaria compreendida na região (não-visível) do ultravioleta.”. Este seria o primeiro problema teórico que verificamos neste modelo elementar para descrever o átomo de hidrogênio. “Como na época acreditava-se que o átomo de hidrogênio poderia ter mais de um elétron, teoricamente, poderíamos até encontrar outros valores de comprimento de onda, bastando variar o valor de  $r_A$  nas equações acima”.

Porém, como sabemos hoje, o hidrogênio possui apenas um elétron e os experimentos mostram que o seu espectro de emissão apresenta várias linhas espectrais com diversas frequências, inclusive na região visível conforme já foi apresentado na Figura 2 e na Tabela 1. “Desta forma, de acordo com a teoria o modelo de Thomson o átomo de hidrogênio irradiaria apenas na frequência do ultravioleta, não concordando, portanto quantitativamente com os resultados obtidos experimentalmente, ou seja, o modelo não consegue explicar as linhas espectrais emitidas pelo átomo de hidrogênio”. Além disso, o modelo não conseguiu explicar dados de espalhamento de partículas- $\alpha$  como será mostrado a seguir.

### 2.3 Evidência experimental no espalhamento de partículas alfa

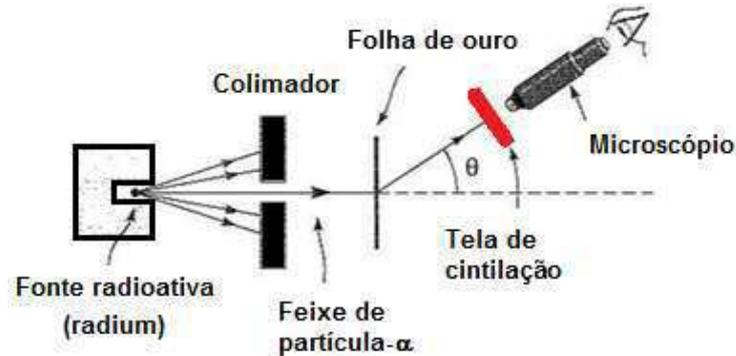
Nesta seção mostraremos um outro problema encontrado ao tentar usar o modelo de Thomson para explicar o espalhamento de partículas alfa.

A comprovação definitiva da ineficácia do modelo de Thomson descrever o átomo veio em 1911 com o experimento comandado por um ex-aluno de Thomson, o físico e químico neozelandês Ernest Rutherford conhecido como “o pai da física nuclear” e ganhador do Prêmio Nobel de Química em 1908 "por suas investigações sobre a desintegração dos elementos e a química das substâncias radioativas". O experimento de Rutherford consistia no espalhamento de partículas- $\alpha$ <sup>1</sup> por uma lâmina de ouro muito fina. A ilustração deste experimento é apresentada na Figura 3. Observe que o elemento químico *radium* é usado como fonte radioativa emissora de partículas- $\alpha$ .

---

<sup>1</sup> Partículas alfas são átomos de hélio ionizados com dois elétrons a menos, ou seja, é uma partícula composta por dois prótons e dois nêutrons.

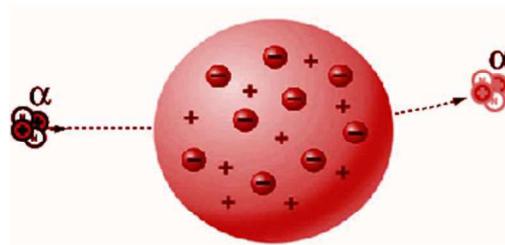
**Figura 3** - Experimento espalhamento de partículas- $\alpha$



**Fonte:** Autoria própria, 2022

No átomo de Thomson todas as partículas- $\alpha$  deveriam atravessar a matéria, como na Figura 4. Porém, Ernest Rutherford descobriu que algumas dessas partículas eram defletidas antes de se chocar com o átomo.

**Figura 4** - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$  no modelo de Thomson.



**Fonte:** Autoria própria, 2022

O mais problemático ainda é que se todo o átomo (incluindo os seus elétrons) estivesse contido numa região esférica, como propôs o modelo de Thomson, uma colisão elástica de uma partícula- $\alpha$  com este átomo impõe, pela conservação de momentum e energia, que o ângulo de espalhamento  $\theta$  da partícula deva ser bem inferior a  $90^\circ$  da ordem de  $\theta \simeq 0,02 \text{ rad}$ . “Surpreendentemente, experiências de espalhamento com partículas- $\alpha$  realizadas por Rutherford, Geiger e Marsden (ex-alunos de Rutherford) mostraram que algumas partículas- $\alpha$  eram espalhadas com ângulos bem superior a  $90^\circ$ . Os cientistas inclusive observaram ângulos de  $180^\circ$ ! Essas partículas eram detectadas por uma camada de composto de Sulfeto de Zinco (ZnS) que produz cintilação quando atingido por uma partícula- $\alpha$ ”. A seguir mostraremos o cálculo da estimativa desse pequeno ângulo de espalhamento máximo usando o modelo de Thomson.

## 2.4 Cálculos teóricos no espalhamento de partículas

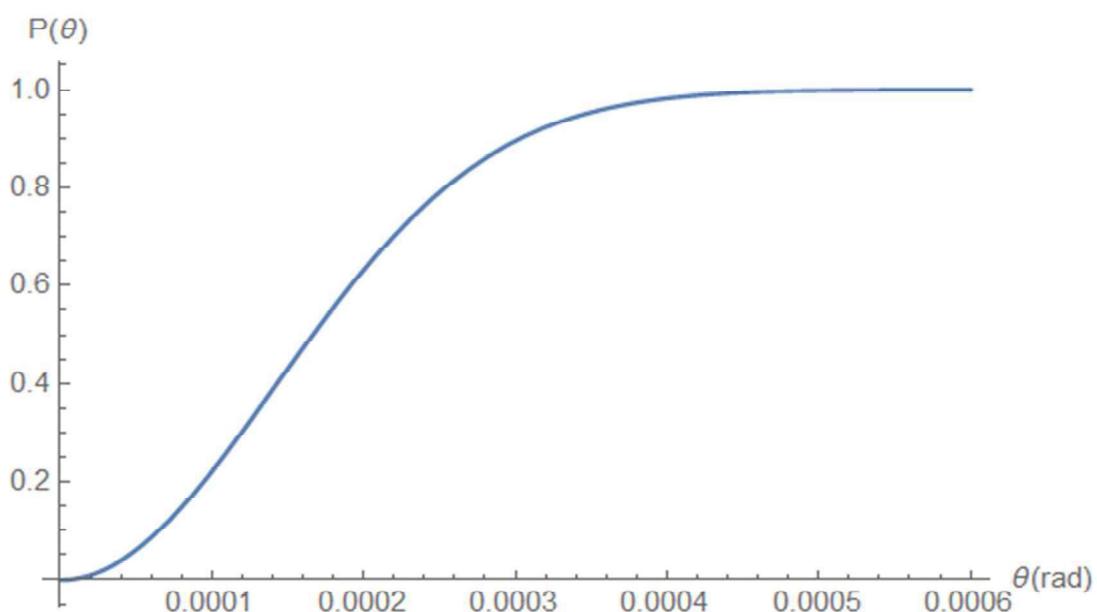
Aplicando a teoria estatística ao modelo de Thomson pode ser mostrado que o número de partículas- $\alpha$  espalhadas pelo alvo (folha de ouro)  $N(\theta)d\theta$  no intervalo angular  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , é dado pela distribuição gaussiana:

$$N(\theta)d\theta = \frac{2I\theta}{\theta^2} e^{-\theta^2/\theta^2} d\theta, \quad (6)$$

onde na equação acima  $\theta$  é a coordenada polar que varia de 0 a  $\pi$  rad, ela representa o ângulo de deflexão da partícula ao passar por um único átomo. O ângulo  $\theta$  representa a deflexão total da partícula ao atravessar todos os átomos em sua trajetória através do alvo. O termo  $I$  é a intensidade do feixe das partículas- $\alpha$  que incide sobre o alvo e  $\theta^2$  é a deflexão quadrática média da partícula- $\alpha$  devido aos  $N$  átomos do alvo que causam a deflexão na partícula ao atravessar a folha.

Na figura 5 traçamos o gráfico da probabilidade (número de partículas alfa espalhadas pelo alvo por intensidade) em função do ângulo de espalhamento total. Observamos que esse número atinge o valor máximo de partículas espalhadas para ângulos de espalhamentos relativamente pequenos, o que está de acordo com o que será mostrado na Eq. (14).

**Figura 5** - Número de partículas alfa espalhadas pelo alvo em função do ângulo de espalhamento total no modelo de Thomson.



**Fonte:** Autoria própria, 2022

No anexo B é mostrado o cálculo do número de partículas- $\alpha$  espalhadas pelo alvo por todos os ângulos possíveis de espalhamento a partir da equação (6). Da teoria estatística temos ainda a seguinte relação

$$(\theta^2)^{1/2} = \sqrt{\aleph}(\theta^2)^{1/2} \quad (7)$$

Podemos estimar o número de átomos de ouro por unidade de volume na folha de ouro, a partir do número de Avogrado e da massa molecular

$$\begin{aligned} \frac{\text{Número de átomos}}{\text{cm}^3} &= \left(6,02 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}}\right) \left(\frac{1 \text{mol}}{197 \text{g}}\right) \left(19,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = \\ &= 5,9 \times 10^{22} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} = 5,9 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} \quad (8) \end{aligned}$$

com isso cada átomo ocupa um volume de

$$V = \frac{1}{5,9 \times 10^{28}} = 0,17 \times 10^{-28} \text{m}^3. \quad (9)$$

Assumindo que os átomos estejam equidistantes, a distância  $d$  entre eles é dada por

$$d = V^{1/3} = (0,17 \times 10^{-28} \text{m}^3)^{1/3} \approx 10^{-10} \text{m}. \quad (10)$$

A quantidade de átomos presentes na folha de ouro, com espessura da ordem de  $\approx 10^{-6} \text{m}$ , será

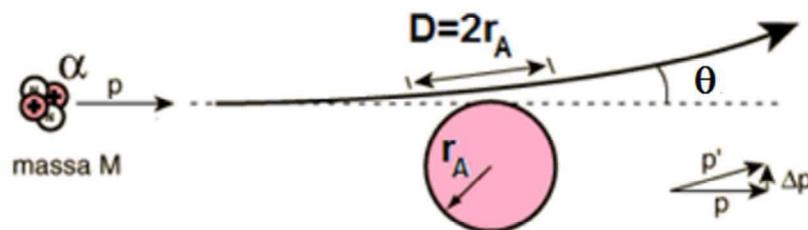
$$\aleph = \frac{10^{-6} \text{m}}{10^{-10} \text{m}} = 10^4 \text{átomos}. \quad (11)$$

A força coulombiana máxima sentida pela partícula- $\alpha$  na passagem através do átomo ocorre na superfície do átomo, uma vez que é considerada a carga total das partículas no interior do átomo, observe a Figura 5, essa força é dada pela equação

$$F_{max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(Ze)}{r_A^2} \quad (12)$$

onde  $Z$  é o número atômico.

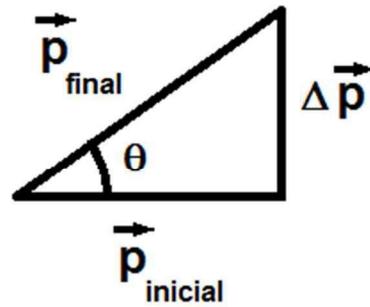
**Figura 6** - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$  na superfície de um átomo



**Fonte:** Autoria própria, 2022

Para deflexão máxima, suponha que esta força transmita uma variação de momento (impulso)  $\Delta p$  perpendicular à direção original do movimento, como mostrado na Figura 6.

**Figura 7** - Deflexão máxima na superfície de um átomo



**Fonte:** Autoria própria, 2022

Neste caso, temos

$$\Delta p_{\alpha} = \int F dt < F_{max} \Delta t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(Ze)}{r_A^2} \left( \frac{2r_A}{v_{\alpha}} \right) = \frac{ze^2}{\pi\epsilon_0 r_A v_{\alpha}}. \quad (13)$$

O momento da partícula alfa é  $p_{\alpha} = m_{\alpha} v_{\alpha}$  onde a velocidade medida é da ordem de [3]  $v_{\alpha} \simeq 2.06 \times 10^7 m/s$  e o ângulo de espalhamento  $\theta$  é de aproximadamente (conforme o anexo B.3)

$$\theta \simeq \frac{\Delta p_{\alpha}}{p_{\alpha}} \simeq 10^{-4} rad. \quad (14)$$

o que representa uma estimativa do ângulo de espalhamento da partícula alfa por um átomo de acordo com o modelo de Thomson.

Se assumirmos que a partícula- $\alpha$  interage com apenas um elétron de cada átomo, então, pela equação (7), resultado da equação (9) temos

$$(\underline{\theta^2})^{1/2} = \frac{(\underline{\theta^2})^{1/2}}{\sqrt{N}} \simeq \frac{2 \times 10^{-2}}{10^2} \simeq 2 \times 10^{-4} rad. \quad (15)$$

Ou seja, a (máxima) deflexão quadrática da partícula- $\alpha$  é da ordem bem pequena em comparação com alguns resultados obtidos. Os experimentos mostraram que a fração de partículas- $\alpha$  espalhadas com ângulos de espalhamento maiores que  $90^{\circ}$ , embora pequenos, não era igual a zero,

$$\frac{N(\theta > 90^{\circ})}{I} \simeq 10^{-4}. \quad (16)$$

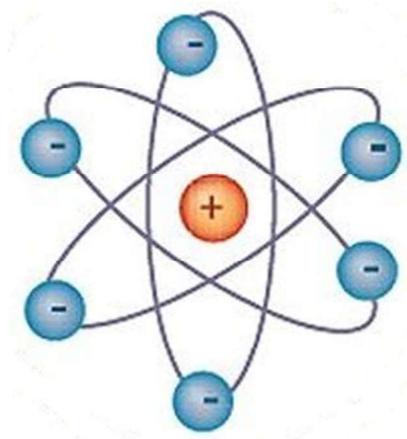
A probabilidade pequena para o espalhamento em ângulos grandes não poderia jamais ser explicada em termos do modelo proposto por Thomson.

### 3. MODELO DE RUTHERFORD

#### 3.1 O átomo de Rutherford

O modelo idealizado por Ernest Rutherford para o átomo é constituído por um núcleo concentrado onde estariam localizadas as cargas positivas e ao redor do núcleo teríamos os elétrons, as cargas elétricas negativas na região chamada eletrosfera. O modelo ficou conhecido como “modelo de sistema planetário”. Deve ser observado que o resultado encontrado na Eq. (13) para ângulos pequenos de espalhamento considerou que o tamanho do átomo no modelo de Thomson seria da ordem  $10^{-10}\text{m}$ , inclusive a deflexão máxima nesta estimativa do raio atômico daria ângulos de espalhamento de no máximo  $10^{-4}$  rad . Porém, os resultados experimentais mostraram que haviam grandes ângulos de espalhamento, inclusive ângulos de  $180^\circ$ .

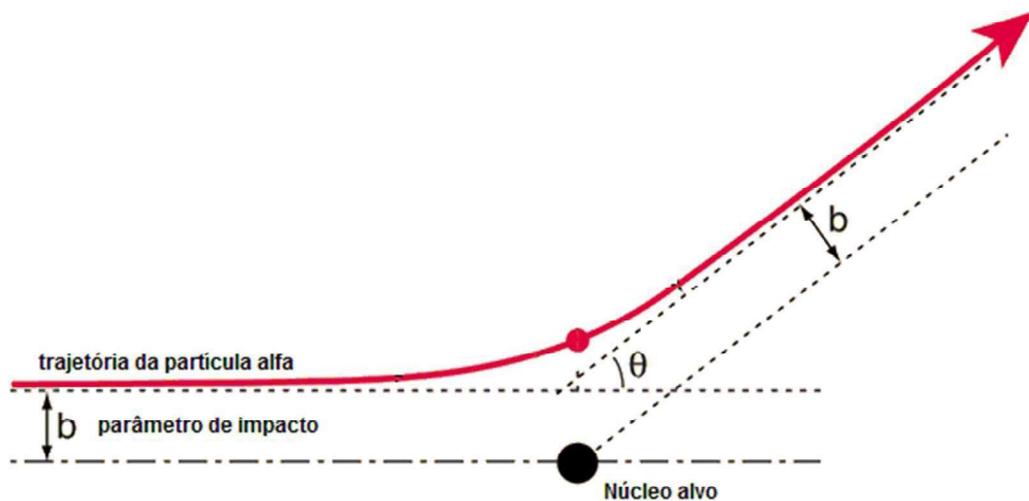
**Figura 8** - Modelo atômico idealizado por E. Rutherford



**Fonte:** Autoria própria, 2022

Como no modelo de Rutherford as cargas positivas ficam localizadas no núcleo atômico, quando uma partícula alfa que possui uma carga positiva se aproxima deste núcleo ela sofre uma repulsão eletrostática e têm sua trajetória modificada conforme mostrado na Figura 8.

**Figura 9** - Espalhamento de uma partícula- $\alpha$  pelo núcleo atômico no modelo de Rutherford



**Fonte:** Autoria própria, 2022.

Na figura anterior  $\theta$  representa o ângulo de espalhamento da partícula alfa por um núcleo atômico, o parâmetro de impacto  $b$  que representa a distância perpendicular da trajetória da partícula alfa antes de ser espalhada pelo núcleo com a reta paralela a assíntota que passa pelo núcleo.

A energia cinética inicial da partícula é igual a sua energia cinética final uma vez que o núcleo permanece estacionário. “Como sabemos, a força coulombiana entre a partícula e o núcleo é uma força radial, isso faz com que o momento angular  $L = rp = bMv$  da partícula seja conservado, onde  $p$  é o momento linear e  $M$  é a massa da partícula”. A distância mínima entre o núcleo e a partícula alfa será representada por  $D$ .

A equação da trajetória da partícula alfa pode ser deduzida a partir da lei de Newton, considerando a força coulombiana entre a partícula alfa e o núcleo do átomo, ou seja, em módulo a força será dada por:

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(ze)(Ze)}{r^2}. \quad (15)$$

Essa força é um exemplo de força radial. Nesse caso, o momento angular é constante<sup>2</sup>, com isso usando a segunda lei de Newton para o movimento da partícula alfa de massa  $M$ , teremos<sup>3</sup>:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} = Ma = M \left( \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \right). \quad (16)$$

<sup>2</sup> Consultar o capítulo 8 da referência 12.

<sup>3</sup> Consultar o capítulo 1 da referência 13.

O primeiro termo do segundo membro da equação anterior,  $\frac{d^2r}{dt^2}$ , representa a aceleração radial responsável pela variação do módulo do vetor posição da partícula. O segundo termo,  $-r\omega^2 = -r\frac{d\varphi}{dt}$ , representa a aceleração centrípeta [13] e  $\varphi$  é o ângulo polar. A equação (16) representa uma equação diferencial de segunda ordem na variável  $r$ . A solução dessa EDO encontra-se no apêndice C-4, o resultado encontrado

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos\varphi - 1), \quad (17)$$

representa a equação de uma hipérbole em coordenadas polares, com (conforme a equação C.10)

$$D \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2/2}. \quad (18)$$

que corresponde a menor distância entre a partícula alfa e o núcleo em uma colisão frontal em que  $b = 0$ . Para uma colisão não frontal a menor distância entre a partícula alfa e o núcleo, que iremos representar por  $R$  é demonstrada no Apêndice C e é dada por

$$R = \frac{D}{2} \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \right). \quad (19)$$

Como é mostrado na equação (C.5) do Apêndice C, o ângulo de espalhamento  $\theta$  pode ser obtido a partir da equação (17) fazendo com que  $r \rightarrow \infty$  e usando o fato que  $\theta = \pi - \varphi$ . O resultado lá obtido corresponde a seguinte equação

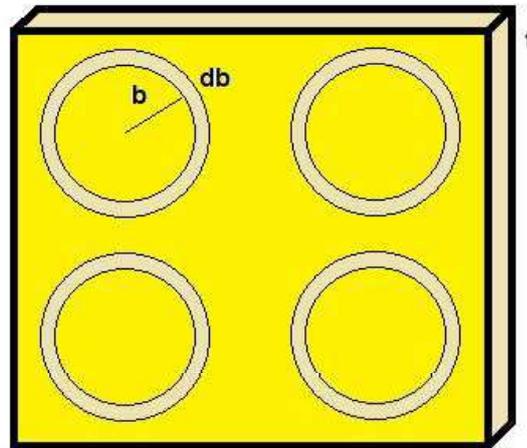
$$\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{D} \quad (20)$$

### 3.2 O espalhamento de Rutherford

Nesta seção demonstraremos a equação que rege o espalhamento de Rutherford a partir do número de partículas alfa espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  ao atravessar toda a folha alvo com espessura  $t$ .

Considerando o parâmetro de impacto no intervalo  $b$  e  $b + db$ , um anel de raio interno  $b$  e raio externo  $b + db$  possui uma área de  $2\pi b db$ . O número de anéis num pedaço de  $1 \text{ cm}^2$  da folha é dado por  $\rho t$ , onde  $\rho$  é a densidade de átomos na folha.

**Figura 10** - Folha de ouro de área de espessura  $t$ . Os anéis formados entre  $b$  e  $b + db$  são centrados sobre os núcleos.



**Fonte:** Autoria própria, 2022

A probabilidade que uma partícula alfa passa através de um anel é  $p(b)db$  é igual à área total ocupada por esses anéis dividida pela área total do pedaço da folha. Supomos que a folha seja suficientemente fina para que possamos ignorar superposição de anéis de núcleos diferentes. O processo envolve um único espalhamento, e a probabilidade de que haja espalhamento considerável por mais de um núcleo é muito pequena. Logo

$$P(b)db = \rho t(2\pi b)db \quad (21)$$

mas pela equação (20),  $b = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , de forma que chamado  $\frac{\theta}{2} = \alpha$ ,

$$b = \frac{D}{2} \cot(\alpha) \Rightarrow b = \frac{D \cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \quad (23)$$

Calculando  $\frac{db}{d\alpha}$  e usando a regra derivado para o quociente  $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ , obtemos

$$\frac{db}{d\alpha} = \frac{D [(-\sin\alpha)(\sin\alpha) - (\cos\alpha)(\cos\alpha)]}{2 \sin^2\alpha}$$

$$\frac{db}{d\alpha} = -\frac{D (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{2 \sin^2\alpha}$$

$$\frac{db}{d\alpha} = -\frac{D}{2} \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (24)$$

Substituindo o valor de  $\alpha = \theta/2$ ,

$$\frac{db}{d\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{D}{2} \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Rightarrow db = -\frac{D}{2} \frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\frac{\theta}{2}.$$

Agora, multiplicando o resultado anterior pela expressão de  $b$ , obtemos

$$bdb = \frac{D}{2} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left( -\frac{D}{2} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\text{sen}^2\frac{\theta}{2}} \right) \Rightarrow bdb = -\frac{D^2}{8} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\frac{\theta}{2}}{\text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (25)$$

Com a identidade trigonométricos,

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}(A) \cos(B) + \text{sen}(B) \cos(A)$$

fazendo  $A = B = \frac{\alpha}{2}$ , teremos  $\text{sen}(\alpha) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Com isso,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (26)$$

Substituindo essa expressão na equação (26)

$$bdb = -\frac{D^2}{8} \frac{\frac{\text{sen}(\theta)}{2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \Rightarrow bdb = -\frac{D^2}{16} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta. \quad (27)$$

Portanto, a probabilidade é escrita como

$$P(b)db = \rho t(2\pi b) \left( -\frac{D^2}{16} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \right) = -\frac{\pi}{8} \rho t D^2 \text{sen}\theta \frac{d\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (28)$$

O número de partículas alfa pela intensidade do feixe entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é obtido através da equação

$$\frac{N(\theta)d\theta}{I} = -P(b)db = \frac{\pi}{8} \rho t D^2 \frac{\text{sen}\theta d\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (29)$$

Usando a expressão,

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{M\frac{v^2}{2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2} \quad (30)$$

Ficamos com o seguinte resultado,

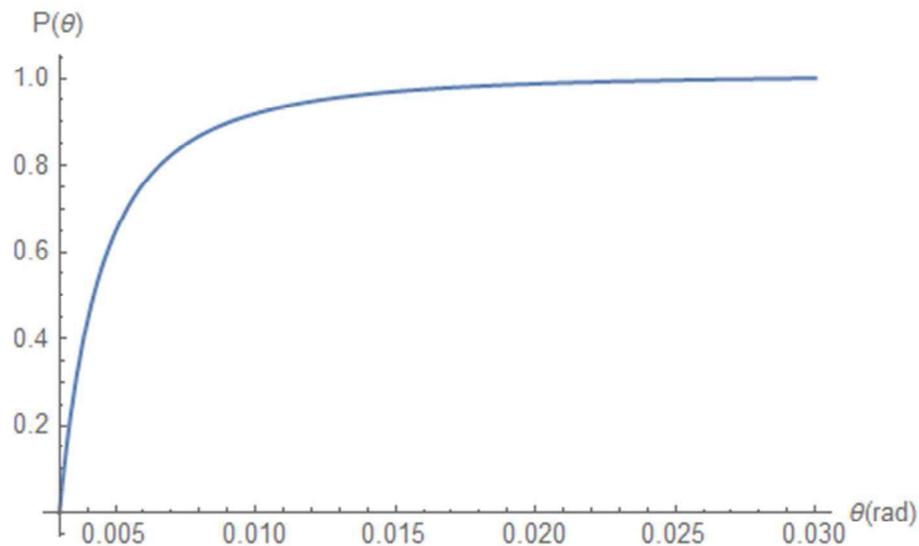
$$\frac{N(\theta)d\theta}{I} = \frac{\pi}{8} \rho t \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{2zZe^2}{Mv^2} \right)^2 \frac{\text{sen}\theta d\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (31)$$

ou ainda,

$$N(\theta)d\theta = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{2zZe^2}{Mv^2}\right)^2 Ipt(\rho 2\pi) \frac{\text{sen}\theta d\theta}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (32)$$

Na Figura 10 traçamos o gráfico do número de partículas alfa espalhadas pelo alvo em função do ângulo de espalhamento total pelo modelo de Rutherford, Eq. (32). Observamos que esse número atinge o valor máximo de partículas espalhadas para ângulos de espalhamentos superiores comparados com o resultado apresentado no modelo de Thomson Figura 5.

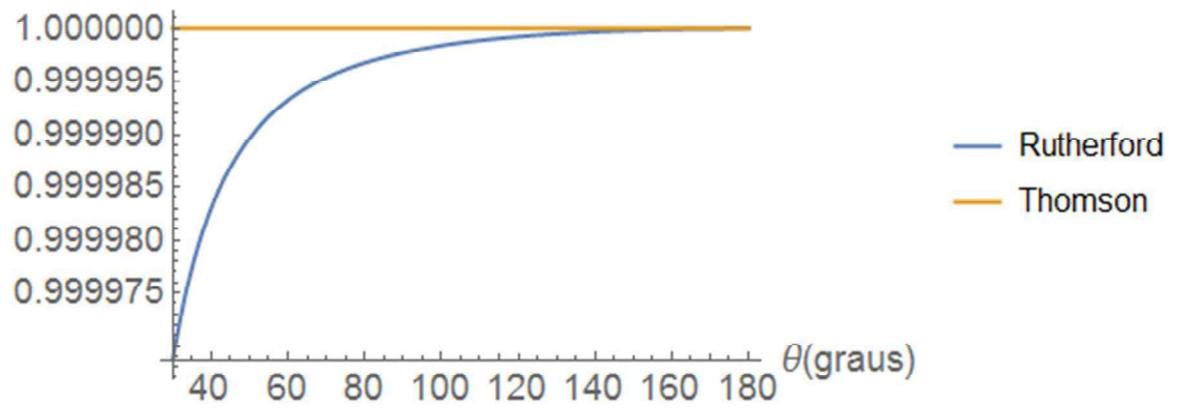
**Figura 11** - Número de partículas alfa espalhadas pelo alvo em função do ângulo de espalhamento total no modelo de Rutherford



**Fonte:** Autoria própria, 2022

No gráfico abaixo apresentamos o comparativo dos resultados encontrados nos dois modelos atômicos estudados neste trabalho. Observe que o modelo de Rutherford consegue prevê espalhamento de partículas alfa com ângulos de espalhamentos grandes, o que coincide com os resultados experimentais.

**Figura 12** - Comparação do número de partículas espalhadas entre os modelos atômicos de Thomson e Rutherford.



**Fonte:** Autoria própria, 2022

#### 4. CONCLUSÃO

Como foi visto durante este trabalho de conclusão de curso, discutimos a incapacidade teórica encontrada no modelo atômico de Thomson, conhecido como modelo “pudim de passas” em explicar resultados experimentais da emissão de radiação do átomo de hidrogênio na região visível do espectro eletromagnético através do cálculo da frequência da onda de radiação emitida pelo elétron. No nosso cálculo foi encontrado uma frequência que está na região do ultravioleta. Vimos também que o modelo de Thomson foi incapaz de explicar os resultados dos experimentos com espalhamento de partículas- $\alpha$  realizados por Rutherford, Geiger e Marsden para grandes ângulos de espalhamentos através do cálculo do ângulo máximo de espalhamento das partículas- $\alpha$  que, como vimos, daria em torno de  $2 \times 10^{-4} rad$ . Em seguida, foi discutido o modelo atômico idealizado por Rutherford, neste modelo o átomo é constituído por um núcleo onde estariam localizadas as cargas positivas e ao redor do núcleo teríamos os elétrons, as cargas elétricas negativas na região chamada eletrosfera, esse sistema ficou conhecido como “modelo de sistema planetário”. Com base nesse novo modelo de átomo demonstramos a equação que fornece o número de partículas alfa espalhadas em função do ângulo de espalhamento. A partir do gráfico percebemos que era possível a existência de grandes ângulos de espalhamento o que batia com os resultados experimentais encontrados por Geiger e Marsden.

Portanto, durante o estudo dos modelos atômicos de Thomson e Rutherford, podemos afirmar que Thomson contribuiu para descobrir umas partículas com carga negativa a que chamou elétrons. “Assim o átomo seria uma massa positiva que para se tornar neutra tinha elétrons distribuídos na sua superfície. Rutherford atribuiu que o átomo é constituído por um pequeno núcleo, que contém quase toda a sua massa e todas as suas cargas positivas, e por um conjunto de elétrons de carga negativa, que giram em volta dele como uma forma de planeta”. Com essa observação podemos concluir que o modelo Thomson não era tão eficaz nem específico, já o modelo Rutherford é mais específico e eficaz.

## REFERÊNCIAS

- EICHLER, M. Pino, J. **Computadores em educação química: estrutura atômica e tabela periódica**, Quim. Nova, 2000.
- EISBERG, R.; RESNICK, R., **Quantum Physics**, 2nd Ed. Wiley, 1985.
- EISBERG, R.; RESNICK, R., **Quantum Physics**, 2nd Ed. Wiley, 1985.
- ERNEST, Rutherford. **The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom**, *Phil. Mag.* 21, 669-688, 1911.
- HANS. G.; ERNEST. M. **On a diffuse reflection of the  $\alpha$ -particles**, *Proc. Roy. Soc. London* 82, 495-500, 1909.
- HANS. G.; ERNEST. M. **The laws of deflexion of  $\alpha$  particles through large angles**, *Phil. Mag.* 25, 604, 1913.
- HOLLAUER, Eduardo. **Química Quântica**. Editora LTC, 2007.
- JOHN, R. T., **Mecânica Clássica**, ed. Bookman, 2013.
- MORTIMER, E. F; MACHADO, A. H. **Química 1**. Editora Scipione, 2a ed., 2013.
- REIS, Martha. **Química 1**. Editora Ática, 1a ed., 2013.
- STEPHEN, T. T.; JERRY B. M., **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**, 5ª edição. Cengage Learning. 2011.
- TERINI, Ricardo Andrade; CAVALCANTE, Marisa Almeida, PAES, Carlos Eduardo de B., VICENTE, Victor E. J. de S. **Utilização de métodos computacionais no ensino: a experiência de Geiger e Marsden do espalhamento de partículas alfa**. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 33-42, abr. 1994.
- THOMSON, J. J. **Philosophical Magazine**, *Cathode Rays*, 1904.

## ANEXO A - Constantes físicas e químicas utilizadas neste TCC

**Tabela A.1** - Constantes usadas nos cálculos deste TCC.

Número atômico do Ouro (Au)	$Z = 79$
Massa atômica do Ouro (Au)	$M_{Au} = 197u$
Densidade volumétrica (Au)	$\rho_{Au} = 19,3g/cm^3$
Número de Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23}$
Raio atômico médio	$r_A = 10^{-10}m$
Massa do elétron	$m_e = 9,1 \times 10^{-31}kg$
Massa da partícula- $\alpha$	$m_\alpha = 6,64 \times 10^{-27}kg$
Carga do elétron	$q_e = e = -1,60 \times 10^{-19}C$
Carga da partícula- $\alpha$	$q_\alpha = 2 e $
Permissividade do vácuo	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}Nm^2/C^2$
Velocidade da luz no vácuo	$c = 3,00 \times 10^8m/s$

## ANEXO B - Cálculos usados no modelo de Thomson

### B.1 Cálculo da intensidade

$$\int_0^{180^\circ} N(\theta) d\theta = \int_0^{180} \frac{2I\theta}{\theta^2} e^{-\frac{\theta^2}{\theta^2}} d\theta = I \int_0^{180} \frac{2\theta}{\theta^2} e^{-\frac{\theta^2}{\theta^2}} d\theta \quad (\text{B.1})$$

Usando o método de substituição

$$u = -\frac{\theta^2}{\theta^2}$$

$$du = 2 \frac{\theta^2}{\theta^2} d\theta$$

$$\int_0^{180^\circ} N(\theta) d\theta = I \int_0^{\left(\frac{180}{\theta}\right)^2} e^{-u} du = I \cdot (-e^{-u})_0^\infty = I(-0 + 1) = I \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Cálculos da frequência da onda emitida pelo elétron no átomo de Thomson

Da lei de Gauss, sabemos que podemos calcular a força que atua sobre o elétron usando a lei de Coulomb

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q1||q2|}{r^2} r \Rightarrow F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4\pi\alpha^3\rho}{3}\right) \frac{e}{a^2} \Rightarrow F = -\frac{\rho ea}{3\epsilon_0}. \quad (\text{B.3})$$

Portanto, podemos escrever

$$F = -ka, \quad (\text{B.4})$$

onde a constante é dada por  $k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0}$ . Suponhamos que a carga positiva total tenha um valor igual em módulo à carga de um elétron (de forma que a carga total do átomo seja zero), e suponhamos que esteja distribuída sobre uma esfera de raio  $r' = 10^{-10} \text{ m}$ . Podemos assim achar a constante da força  $k$  e a frequência do movimento do elétron. Temos:

$$\rho = \frac{e}{\frac{4\pi r'^3}{3}} \quad (\text{B.5})$$

De modo que

$$k = \frac{\rho e}{3\epsilon_0} = \frac{e}{\frac{4\pi r^3}{3}} \frac{e}{3\epsilon_0} = \frac{3e}{4\pi r^3} \frac{e}{3\epsilon_0} = \frac{e}{4\pi r^3} \frac{e}{\epsilon_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (\text{B.6})$$

Substituindo as constantes, encontramos

$$k = \frac{9,0 \times 10^9 (1,60 \times 10^{-19})^2}{(10^{-10})^3} = 2,3 \times 10^2 \text{ N/m}. \quad (\text{B.7})$$

A frequência do movimento harmônico simples é então

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2,3 \times 10^2}{9,11 \times 10^{-31}}} = 2,5 \times 10^{15} \text{ Hz}. \quad (\text{B.8})$$

O comprimento de onda  $\lambda$  é então,

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3,00 \times 10^8}{2,5 \times 10^{15}} = 1,18 \times 10^{-7} \text{ m} = 118 \text{ nm} \cong 1200 \text{ \AA}. \quad (\text{B.9})$$

### B.3 Ordem de grandeza do ângulo de espalhamento da partícula alfa por um átomo de hidrogênio

Cálculo do momento da partícula alfa

$$p_\alpha = m_\alpha v_\alpha = (6,64 \times 10^{-27} \text{ kg})(2,06 \times 10^7 \text{ m/s}) = 1,388 \times 10^{-19} \text{ kg m/s}. \quad (\text{B.10})$$

Cálculo da variação do momento da partícula alfa

$$\Delta p_\alpha = \int F dt < F_{max} \Delta t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(Ze)}{r_A^2} \left( \frac{2r_A}{v_\alpha} \right) = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 r_A v_\alpha}. \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta p_\alpha = \frac{79 \cdot (1,60 \times 10^{-19})^2}{(3,142) \cdot (8,85 \times 10^{-12}) \cdot (10^{-10}) \cdot (2,06 \times 10^7)} = 3,531 \times 10^{-23} \text{ kg m/s}. \quad (\text{B.12})$$

A ordem do ângulo de espalhamento é, portanto

$$\theta \approx \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{3,531 \times 10^{-23}}{1,388 \times 10^{-19}} = 2,54 \times 10^{-4} \text{ rad}. \quad (\text{B.13})$$

## ANEXO C - Cálculos usados no modelo de Rutherford

### C.1 Conservação do momento angular

O torque é definido por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (\text{C.1})$$

Como a força é coulombiana tem a direção do vetor  $\vec{r}$ , assim o produto vetorial é nulo ( $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = 0$ ). Mas o torque representa a taxa de variação do momento angular com o tempo.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \text{ é constante}$$

Como o momento angular é definido por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (M \times \vec{v}) \quad (\text{C.2})$$

temos que o seu módulo é dado por  $L = rMv$ .

### C.2 Conservação da energia cinética

A energia cinética é conservada pois o espalhamento é elástico, com o núcleo sempre com velocidade nula, assim toda a energia cinética se deve a partícula alfa.

$$E_c = \frac{Mv^2}{2}$$

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv'^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{Mv'^2}{M} \Rightarrow v^2 = v'^2 \Rightarrow v = v'. \quad (\text{C.3})$$

### C.3 Equação da trajetória da partícula alfa

Escreveremos a equação diferencial (16) não em termos das coordenadas  $r$  e  $\varphi$ , mas em termos das coordenadas  $u$ ,  $\varphi$ , fazendo

$$r = \frac{l}{u}. \quad (\text{C.4})$$

Então,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (C.5)$$

ou ainda,

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{Lu^2}{M} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi} \quad (C.6)$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{Lu^2}{M} \quad (C.7)$$

Substituindo esta expressão na equação (6)

$$-\frac{L^2u^2}{M^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{l}{u} \left( \frac{Lu^2}{M} \right)^2 = \frac{zZe^2u^2}{4\pi\epsilon_0M} \quad (C.8)$$

Ou

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{zZe^2M}{4\pi\epsilon_0L^2} = -\frac{zZe^2M}{4\pi\epsilon_0M^2v^2b^2} \quad (C.9)$$

uma vez que o momento angular é dado por  $L = Mvb$ , e como definidos na figura 8,  $v$  é a velocidade inicial da partícula e  $b$  é seu parâmetro de impacto. Se chamarmos

$$D \equiv \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{Mv^2/2}, \quad (C.10)$$

podemos simplificar a equação anterior (C.11)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{D}{2b^2} \quad (C.11)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem para  $u$  como uma função de  $\varphi$  que tem solução conhecida. A solução geral de (C.11) é

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{D}{2b^2} \quad (C.13)$$

com A e B constantes. Para obtermos a solução particular, devemos calcular as constantes, A e B. Exigimos que (C.11) esteja de acordo com as condições iniciais:  $\varphi \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$  e  $\frac{dr}{dt} \rightarrow -v$  quando  $r \rightarrow \infty$  Assim

$$u = \frac{l}{r} = 0 = \text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta) - \frac{D}{2b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + 0 - \frac{D}{2b^2} = 0 \Rightarrow A = \frac{D}{2b^2}. \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{M} \frac{du}{d\varphi} = -v = -\frac{L}{M} [-A \text{sen}(\theta) + B \text{cos}(\theta)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v = -\frac{L}{M} (-0 + B) \Rightarrow B = \frac{vM}{L} \Rightarrow B = \frac{l}{b}. \quad (\text{C.15})$$

Portanto, a solução particular é

$$u = \frac{D}{2b^2} \text{cos}\varphi + \frac{l}{b} \text{sen}\varphi - \frac{D}{2b^2} \quad \text{ou}$$

$$\frac{l}{r} = \frac{l}{b} \text{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\text{cos}\varphi - 1), \quad (\text{C.16})$$

que é a equação da trajetória e representa uma hipérbole em coordenadas polares.

#### C.4 Menor distância ao núcleo

A coordenada radial  $r$  seria igual a  $R$  quando o ângulo polar for  $\varphi = \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$ . Substituindo esse ângulo em (C.16), obtemos

$$\frac{l}{r} = \frac{l}{b} \text{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\text{cos}\varphi - 1)$$

Substituindo

$$\frac{l}{R} = \frac{l}{b} \text{sen}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) + \frac{D}{2b^2} \left[\text{cos}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) - 1\right] \quad (\text{C.17})$$

Da equação (C.10), podemos escrever

$$\text{cotg}\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \rightarrow b = \frac{D}{2} \text{cotg}\frac{\theta}{2} \quad (\text{C.18})$$

ou por identidade trigonométrica

$$b = \frac{D}{2} \text{tg}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{D \text{sen}(\alpha)}{2 \text{cos}(\alpha)} \quad (\text{C.19})$$

onde chamamos  $\alpha = \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$ . Com isso, teremos

$$\begin{aligned}\frac{l}{R} &= \frac{l}{b} \operatorname{sen}\alpha + \frac{D}{2b^2} [\operatorname{cos}\alpha - 1] \\ \frac{l}{R} &= \frac{2 \operatorname{cos}(\alpha)}{D \operatorname{sen}(\alpha)} \operatorname{sen}\alpha + \frac{D}{2} \frac{4 \operatorname{cos}^2\alpha}{D^2 \operatorname{sen}^2\alpha} (\operatorname{cos}\alpha - 1) \\ \frac{l}{R} &= \frac{2}{D} \operatorname{cos}\alpha + \frac{2}{D} \frac{\operatorname{cos}^2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2\alpha} (\operatorname{cos}\alpha - 1) = \frac{2}{D} \left( \frac{\operatorname{cos}\alpha - \operatorname{cos}^3\alpha + \operatorname{cos}^3\alpha - \operatorname{cos}^2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2\alpha} \right) = \\ &= \frac{2}{D} \left( \frac{\operatorname{cos}\alpha - \operatorname{cos}^2\alpha}{1 - \operatorname{cos}^2\alpha} \right) \\ \frac{l}{R} &= \frac{2}{D} \left( \frac{\operatorname{cos}\alpha(1 - \operatorname{cos}\alpha)}{(1 - \operatorname{cos}\alpha)(1 + \operatorname{cos}\alpha)} \right) = \frac{2}{D} \frac{\operatorname{cos}\alpha}{1 + \operatorname{cos}\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R = \frac{D}{2} \left( 1 + \frac{l}{\operatorname{cos}\alpha} \right) \quad (\text{C.20})\end{aligned}$$

ou em termos da variável  $\theta$ ,

$$R = \frac{D}{2} \left( 1 + \frac{l}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \right). \quad (\text{C.21})$$

### C.5 Ângulo de espalhamento

Equação da trajetória da partícula  $\alpha$ :

$$\frac{l}{r} = \frac{l}{b} \operatorname{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{cos}\varphi - 1)$$

considerando  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}\frac{l}{\infty} &= \frac{l}{b} \operatorname{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{cos}\varphi - 1) \\ \frac{l}{b} \operatorname{sen}\varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{cos}\varphi - 1) &= 0 \quad (\text{C.22})\end{aligned}$$

Agora, aplicando as identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\varphi &= 2 \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \operatorname{cos}\frac{\varphi}{2} \\ (\operatorname{cos}\varphi - 1) &= -2 \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

ficamos com

$$\frac{l}{b} 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{D}{2b^2} 2 \operatorname{sen}^2 \varphi = 0$$

$$\frac{D}{2b^2} \operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{l}{b} 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2b^2 l}{D b} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2b}{D} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2b}{D} \Rightarrow \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2b}{D} \Rightarrow \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2b}{D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{2b}{D}. \quad (\text{C.23})$$