



INSTITUTO FEDERAL

Sertão Pernambucano

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SERTÃO

PERNAMBUCANO

CAMPUS SERRA TALHADA

CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

Lucas Ramos Pereira

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA EM SISTEMAS MECÂNICOS

SERRA TALHADA-PE

2023

Lucas Ramos Pereira

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA EM SISTEMAS MECÂNICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Serra Talhada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Alessio T. B. Celeste.

SERRA TALHADA-PE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P436 Pereira, Lucas Ramos.

Aplicação do método de Runge-Kutta em sistemas mecânicos / Lucas Ramos Pereira. - Serra Talhada, 2023.
51 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Alessio Tony Batista Celeste.

1. Física. 2. Métodos numéricos. 3. Runge-Kutta. 4. Pêndulo simples.. I. Título.

CDD 530


LUCAS RAMOS PEREIRA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA EM SISTEMAS MECÂNICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Serra Talhada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Alessio T. B. Celeste.

Aprovado em: 31/05/2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 ALESSIO TONY BATISTA CELESTE
Data: 31/05/2023 21:25:10-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Aléssio Tony Batista Celeste

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Orientador

Daniel Cesar De Macedo
Cavalcante

Assinado de forma digital por Daniel Cesar De
Macedo Cavalcante
Dados: 2023.06.14 23:52:43 -03'00'
Versão do Adobe Acrobat Reader: 2023.001.20174

Prof. Daniel César de Macedo Cavalcante

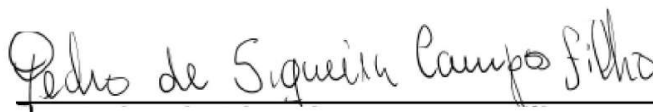
IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Marcelo George
Nogueira da Costa:
06075146474

Assinado digitalmente por Marcelo George Nogueira da
Costa:06075146474
DNI: CN=Marcelo George Nogueira da Costa:06075146474,
OU=IFSERTAOPE - Instituto Federal de Educacao, Ciencia
e Tecnologia do Sertao Pernambucano, O=ICPEdu, C=BR
Razão: Eu estou aprovando este documento
Localização:
Foxit Reader Versão: 9.1.0

Prof. Mr. Marcelo George Nogueira Da Costa

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno



Prof. Dr. Pedro Siqueira Campos Filho

IFSertãoPE – Campus Petrolina - Examinador Externo

AGRADECIMENTOS

Durante a escrita deste trabalho, eu estava lendo o livro “Memórias Póstumas de Brás Cubas”, do grande Machado de Assis. Na dedicatória do romance, ele escreve: “Ao verme que primeiro roeu as frias carnes do meu cadáver dedico como saudosa lembrança estas Memórias Póstumas”. Sarcasmo? Não. Embora existam tantas interpretações, podemos escrever que uma delas é que de tantas pessoas que fizeram parte da vida de Brás Cubas, ele desconsiderou a todas e escolheu os vermes como merecedores de um epitáfio. Como não sou um defunto autor, não estou no além e tenho irritação com características egocêntricas, agradeço a Deus, a minha família, minha namorada, ao Prof. Alessio pela orientação, aos outros professores que contribuíram na minha formação, aos meus amigos e colegas.

A Deus e aos meus pais.

EPÍGRAFE

“... Sem imperfeição, nem você nem eu existiríamos.”

Stephen Hawking

RESUMO

Os métodos numéricos têm como objetivo solucionar problemas matemáticos com menor complexidade. No decorrer da história humana, variados métodos efetuando aproximação foram construídos, mas somente após a revolução dos computadores, as contribuições dos métodos numéricos se tornaram incalculáveis. Os métodos de Runge-Kutta são mecanismos numéricos que se aproximam de resultados reais, quando estamos trabalhando na solução de equações diferenciais de primeira ordem. Neste trabalho, descrevemos de forma analítica problemas ligados ao pêndulo criticamente amortecido e o pêndulo plano não-linear, como também, utilizamos o software Mathematica[®] para obtermos os resultados do método numérico; na qual, conseguimos gerar os diagramas de fase e visualizamos a aproximação do valor numérico do real. Nossa atividade limitou-se na aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4), e também resolveu questões com condições específicas ligadas ao pêndulo simples, reconhecendo que existem inúmeras outras áreas de aplicação na natureza. Mediante os problemas resolvidos, observamos que é usual se encontrar em uma situação em que os conhecimentos matemáticos não são suficientes para a descoberta de uma solução exata. Com êxito nos resultados, contribuímos em expor que a maior parte dos problemas físicos são complexos e muitas vezes envolvem fenômenos não-lineares.

Palavras-chave: Métodos numéricos; Runge-Kutta; Pêndulo simples.

ABSTRACT

Numerical methods aim to solve mathematical problems with less complexity. Throughout human history, various approximation methods were built, but only after the computer revolution, the contributions of numerical methods became incalculable. Runge-Kutta methods are numerical mechanisms that approximate real results when we are working on the solution of first-order differential equations. In this work, we analytically describe problems related to the critically damped pendulum and the non-linear plane pendulum, as well as, we use the Mathematica® 11 software to obtain the results of the numerical method; in which we managed to generate the phase diagrams and visualize the approximation of the numerical value of the real. Our activity was limited to the application of the fourth order Runge-Kutta method (RK-4), and also solved questions with specific conditions linked to the simple pendulum, recognizing that there are countless other areas of application in nature. Through the solved problems, we observe that it is usual to find ourselves in a situation where mathematical knowledge is not enough to discover an exact solution. With successful results, we contribute by exposing that most physical problems are complex and often involve non-linear phenomena.

Keywords: Numerical methods; Runge-Kutta; Simple pendulum.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Oscilador Harmônico Linear Simples	17
Figura 2- Pêndulo Simples	19
Figura 3- Diagrama de Forças.....	20
Figura 4- Pêndulo do Exemplo 3.3.....	26
Figura 5- Pêndulo Plano.....	30

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Exposição Geométrica do RK-2.....	15
Gráfico 2- Exposição Geométrica do RK-4.....	16
Gráfico 3- Exposição Geométrica de RK-4.....	16
Gráfico 4- Três Casos de Amortecimento.	24
Gráfico 5- Diagrama de Fase da Equação 44	27
Gráfico 6- Diagrama de Fase do Exemplo 3.3	28
Gráfico 7- Diagrama de Fase do Exemplo 3.3	29
Gráfico 8- Potencial.....	31
Gráfico 9- Diagrama de Fase da Equação 74	32
Gráfico 10- Diagrama de Fase para o Pêndulo Plano.....	36
Gráfico 11- Diagrama de Fase para o Pêndulo Plano.....	37

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA	13
2.1	Runge-Kutta de Primeira Ordem (RK-1)	14
2.2	Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK-2)	14
2.3	Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK-4)	15
3	MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M. H. S.)	17
3.1	Oscilador Harmônico Unidimensional	17
3.2	Pêndulo Simples	19
4	ESPAÇO DE FASE NA MECÂNICA CLÁSSICA	22
5	SISTEMAS NÃO-LINEARES	23
5.1	Oscilações Amortecidas	23
5.1.1	Movimento Criticamente Amortecido	25
5.2	Pêndulo Criticamente Amortecido	25
5.3	Pêndulo Não-Linear	29
6	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICE A- PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO 41	42
	APÊNDICE B- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 44	43
	APÊNDICE C- CÓDIGO DO PÊNDULO COM AMORTECIMENTO	44
	APÊNDICE D- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 74	45
	APÊNDICE E- DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 86	46
	APÊNDICE F- RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO 88	47
	APÊNDICE G- CÓDIGO PÊNDULO SIMPLES NÃO-LINEAR	49

1 INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são ferramentas e aplicações de algoritmos que permitem formular e solucionar problemas matemáticos com menor complexidade, seja por meio de operações aritméticas elementares, cálculo de funções, consulta a uma tabela de valores ou a um gráfico, arbitramento de um valor etc. [1].

Tratando-se de algoritmos numéricos, ou seja, uma série de regras ou instruções estabelecidas que, por intermédio de uma sucessão de etapas, permitem abeirar o resultado real [2], tem-se encontrado registros desde a época dos babilônicos, a título de exemplo, o método babilônio para o cálculo de raízes quadradas. Por volta de quatro mil anos atrás, esse processo, baseando-se em aproximações, permitiu aos matemáticos da época o cálculo de raízes com uma grande precisão [3]. Temos também registros promovidos pelos egípcios sobre o método da falsa posição, que é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente podemos interpretar como relacionados a equações e sistemas de equações lineares [4].

No decorrer da história humana, variados métodos efetuando aproximação foram construídos, e somando a existência de modelos complexos onde muitos não eram possíveis de serem feitos de forma analítica, com o nascimento do cálculo e dos logaritmos, houve um crescimento significativo para o desenvolvimento de procedimentos numéricos. Na Idade Moderna e Contemporânea, tivemos a criação de métodos numéricos feitos por Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Friedrich Gauss, entre outros. Contudo, embora antes já existissem máquinas de calcular, foi apenas com a construção dos primeiros computadores eletromecânicos na década de 1940, que os cientistas e engenheiros fizeram com que os métodos numéricos computacionais tivessem maiores alcances [1].

Com essa revolução dos computadores, as contribuições dos métodos numéricos são incalculáveis, porquanto concernem ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas, não somente obstáculos computacionais ou matemáticos, mas até educacionais e sociais, como escreve Bassanezi:

(...) elas constituem um meio educacional auxiliar para apoiar a aprendizagem dos alunos e permitem criar situações de aprendizagem

estimulante. É outra maneira de buscar e viabilizar a construção do conhecimento, de maneira mais autônoma e independente, em um novo ambiente, onde os movimentos e as interações são diferentes e obedecem a modelos. Além disso, abrem um novo leque de possibilidades em função das inúmeras simulações que podem ser realizadas e dos questionamentos que podem ser estabelecidos [5].

Uma aplicabilidade dos métodos numéricos é a resolução de equações diferenciais, sendo essas equações caracterizadas por terem funções que aparecem na equação sob a forma das respectivas derivadas. Essas equações tem um papel estrutural na física, uma vez que as equações que descrevem a natureza ao nosso redor ou são trivialmente simples ou são impossíveis de serem resolvidas analiticamente [6].

Construído por volta de 1900 pelos matemáticos Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta, o método de Runge-Kutta é aplicado na resolução de equações diferenciais de primeira ordem que portam valor inicial. No contexto dos sistemas não-lineares, isto é, a natureza evolui no tempo com um comportamento instável e aperiódico, o método promove resultados aproximados do real que frequentemente não são encontrados de maneira analítica. O objetivo do trabalho é solucionar problemas em sistemas mecânicos não-lineares utilizando a descrição analítica e numérica, em especial, decifrar o pêndulo simples não-linear. Para tal fim, dispomos de exemplos do livro Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas, escrito pelos autores Stephen Thornton e Jerry Marion [7], e do software Mathematica®.

2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Os métodos numéricos de Runge-Kutta (RK) pertencem ao grupo de métodos iterativos, isto é, trata-se de uma técnica que concebe uma sequência de soluções aproximadas que vão melhorando conforme iterações são desempenhadas. O método de RK é possivelmente um dos métodos mais populares, e o de quarta ordem é um dos mais usados para obter soluções aproximadas de valor inicial. Cada método de Runge-Kutta compõe-se em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo [8].

Os métodos de RK são aplicados para aproximar numericamente a solução exata de uma equação diferencial ordinária pelos n primeiros termos da expansão em série de Taylor, transporta a concepção de aproveitar o melhor do método de Euler e retêm as seguintes propriedades:

- I. São métodos de passo único;
- II. Não calculam qualquer derivada de $f(x, y)$, em lugar disso, calculam a derivada dessa função em vários pontos;
- III. Os métodos de Runge-Kutta são similares à expansão dos polinômios de Taylor, onde se dão os nomes dos graus. Na nossa definição:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (1)$$

de modo que, a equação (1) é a série de Taylor da função f em torno de a . Em termos de somatório, ficará:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (2)$$

Olhando a série e realçando nossa mente aos métodos de Runge-Kutta, veremos que $(x-a)$ representa o passo h e n é o k que estabelece as inclinações das nossas retas nos métodos. Descreveremos com mais detalhe o Runge-Kutta de ordem 1 e 2, sendo esses métodos semelhantes ao de Euler; como também, o Runge-Kutta de ordem 4, de modo que, esse último foi o que utilizamos nesse trabalho. Nosso objetivo também é mostrar o trabalho com o algoritmo desenvolvido

(APÊNDICE B, C, D e G), o formalismo matemático do método pode ser encontrado nas referências [9], [10] e [11].

2.1 Runge-Kutta de Primeira Ordem (RK-1)

O método de RK-1 é caracterizado pela realização de substituições na expansão de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f'(x_n, y_n)}{1!} h + \frac{f''(x_n, y_n)}{2!} h^2 + O(h^4), \quad (3)$$

onde y_{n+1} é obtido a partir do valor inicial y_n , ciente que a derivada é aplicada no ponto (x_n, y_n) . Para $k_1 = n = 1$, teremos:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf'(x_n, y_n), \\ \text{ou} \\ y_{n+1} = y_n + hk_1; \end{cases} \quad (4)$$

sendo (4) também o método de Euler [12] e [11].

2.2 Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK-2)

Conhecido também como método de Euler melhorado [13], o método de Runge-Kutta (RK-2) caracteriza-se da seguinte forma:

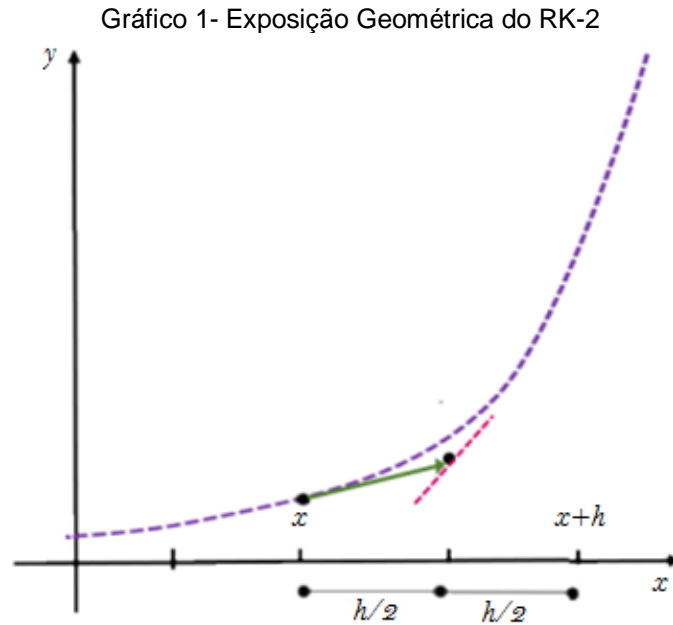
$$k_1 = hf(x_n, y_n); \quad (5)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right); \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2. \quad (7)$$

É importante comentarmos que a ordem do método aponta o número de pontos usados em um subintervalo para designar o valor da inclinação, isto significa que, o RK-2 utiliza a inclinação em dois pontos, o método RK-3 emprega três pontos e o RK-4 terá quatro pontos [14].

Observando (6) e (7), tem erro menor em comparação ao RK-1, isso por que h é diminuído pela metade e a derivada é calculada em outro ponto. Assim, RK-2 tem uma aproximação maior da solução exata comparado com RK-1. Graficamente, teremos:



Fonte: [15]

2.3 Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK-4)

Esse é o método que usaremos para solucionar de forma numérica os problemas ligados ao pêndulo simples. Usando o mesmo procedimento aplicado para calcular RK-2, a formulação geral de RK-4 é:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}, \quad (8)$$

nos quais k_1 e k_2 sabemos do RK-2, enquanto

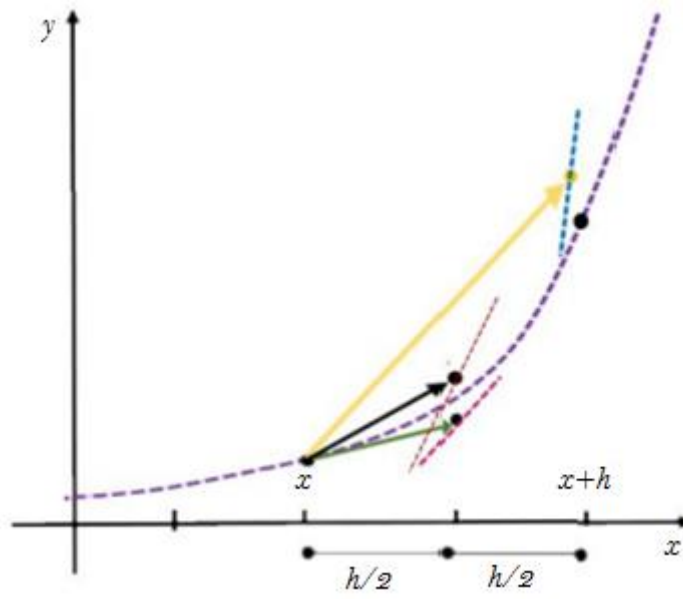
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (9)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3). \quad (10)$$

Em termos geométricos, podemos observar no Gráfico 2, que cada uma das retas são dadas pelas inclinações k_1 (começo do intervalo), k_2 (vetor verde), k_3 (vetor preto) e k_4 (vetor amarelo), que tem como objetivo fazer a estimativa do valor no ponto y , considerando como ponto de partida x e h [15].

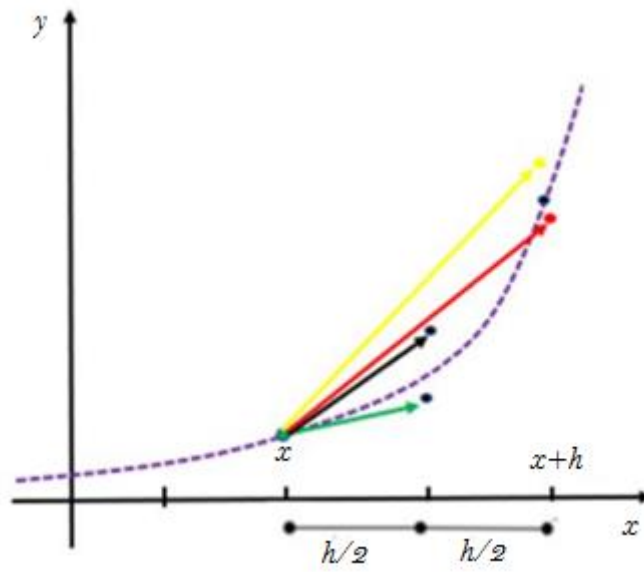
No Gráfico 3, temos o vetor resultante de todas as inclinações (vermelho). Olhando sua projeção, é nítida sua aproximação da solução exata analítica, comprovando como é pequeno o erro de RK-4.

Gráfico 2- Exposição Geométrica do RK-4



Fonte: [15]

Gráfico 3- Exposição Geométrica de RK-4



Fonte: [15]

3 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M. H. S.)

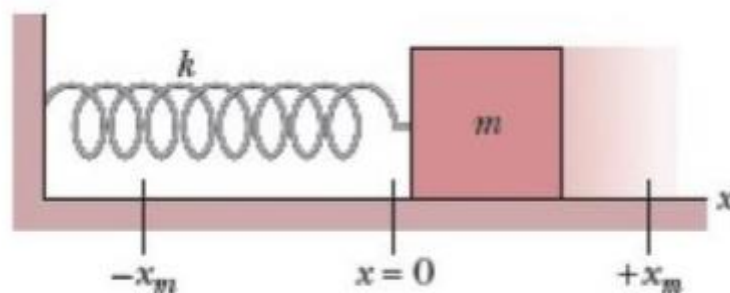
O MHS é um movimento periódico (reaparece em intervalos regulares) que acontece quando um corpo afastado da posição de equilíbrio retorna à posição inicial devido a uma força restauradora [16].

Descrevemos o MHS com base nas grandezas período (tempo necessário para que um movimento realizado por um corpo volte a se repetir) e frequência (número de ocorrências de um evento em um determinado intervalo de tempo), sendo elas grandezas físicas escalares que se relacionam com a rotação de objetos que executam movimentos circulares ou com a produção de ondas, através de funções horárias do movimento [17]. Alguns exemplos de MHS são o pêndulo simples e o oscilador massa-mola. Nesse primeiro momento, as equações serão encontradas por meio do oscilador harmônico.

3.1 Oscilador Harmônico Unidimensional

Vejam os sistema massa-mola (figura 1) que obedeça à Lei de Hooke ($F = -kx$), onde (F) é a força aplicada sobre o corpo preso a uma mola, (k) é constante elástica e (x) a deformação sofrida. Supondo que a resultante das forças que atuam na massa é a força restauradora da mola, utilizaremos a segunda Lei de Newton ($F_r = m\ddot{x}$), onde (F_r) é a força resultante, (m) a massa e \ddot{x} a aceleração. Assim sendo, nossa expressão ficará:

Figura 1- Oscilador Harmônico Linear Simples



Fonte: [18].

$$F = -kx = m\ddot{x} \therefore \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (11)$$

Chamando $\frac{k}{m} = \omega_0^2$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12)$$

sendo que (12) está contida no conjunto de equações diferenciais lineares homogêneas de coeficientes constantes de segunda ordem. Enxergamos que a função exponencial $e^{\alpha t}$ tem a propriedade de que suas derivadas são todas constantes multiplicadas por si próprias. Isto nos faz considerar a função

$$x(t) = Ae^{\alpha t}, \quad (13)$$

como uma possível solução para a equação (12), [19]; as constante A e α iremos determinar a partir das condições iniciais. Derivando duas vezes a solução, teremos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}. \quad (14)$$

Aplicando (13) e (14) na equação do MHS (12), temos que:

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 Ae^{\alpha t} = 0. \quad (15)$$

A única forma da equação acima se anular será quando:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \therefore \alpha^2 = -\omega_0^2; \\ \alpha = \pm i\omega_0. \end{cases} \quad (16)$$

A solução da (15) será:

$$x(t) = A_1 e^{+i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (17)$$

Redefinindo A_1 e A_2 a partir das constantes X_M e φ :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} X_M e^{+i\varphi}; \\ A_2 = \frac{1}{2} X_M e^{-i\varphi}; \end{cases} \quad (18)$$

substituindo,

$$x(t) = \frac{1}{2} X_M e^{+i(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{1}{2} X_M e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (19)$$

Lembrando-se da fórmula de potenciação de De Moivre, sabemos que:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta; \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta; \end{cases} \quad (20)$$

somando, teremos:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \therefore \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (21)$$

Portanto, a equação (19) ficará:

$$x(t) = X_M \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (22)$$

Derivando em relação ao tempo (22), teremos a equação da velocidade:

$$v(t) = -\omega_0 X_M \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (23)$$

E derivando novamente em relação ao tempo (23) teremos a aceleração:

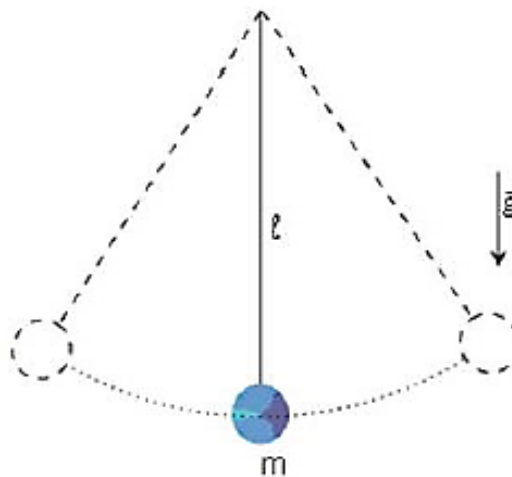
$$a(t) = -\omega_0^2 X_M \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t). \quad (24)$$

As equações posição (22), velocidade (23) e aceleração (24), são equações gerais do MHS. Elas são essenciais para o entendimento dos problemas envolvendo oscilador massa-mola e especificamente para nossos estudos do pêndulo simples.

3.2 Pêndulo Simples

Um pêndulo é um sistema composto por uma massa ligada a um pivô que permite sua movimentação livremente. A massa fica submetida à força restauradora causada pela gravidade [20]. Vamos estudar o pêndulo simples, sendo este formado por uma massa presa a um fio flexível e inextensível em uma de suas extremidades e livre por outra, vejamos a Figura 2:

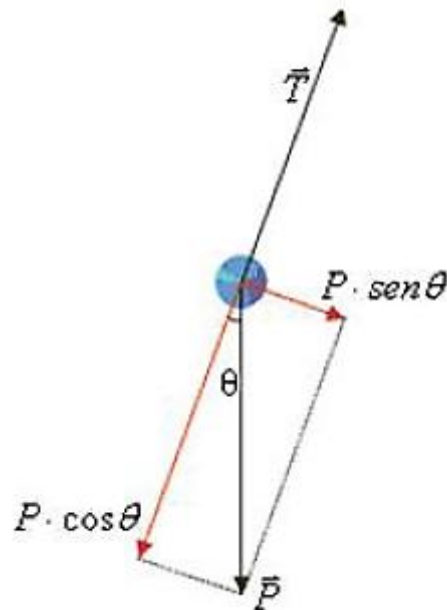
Figura 2- Pêndulo Simples



Fonte: [20]

Quando deslocamos a massa da posição de repouso e a soltamos, o pêndulo efetua oscilações. Ao desconsiderarmos a resistência do ar, as únicas forças que agem sobre o pêndulo são a tensão com o fio e o peso da massa [20]. Portanto, observando a Figura 3:

Figura 3- Diagrama de Forças



Fonte: [20]

enxergamos que a resultante entre a força peso (\vec{P}) e a força de tração(\vec{T}) é uma força centrípeta (F_{cp}), por isso que o movimento é curvilíneo.

A força peso pode ser decomposta em componentes tangencial à trajetória e radial; enquanto a força de tensão é dirigida radialmente. A oscilação se deve a componente tangencial, sendo a força restauradora (contrária ao vetor deslocamento) descrita pela equação:

$$F_{tg} = -P \cdot \text{sen} \theta = -mg \text{sen} \theta. \quad (25)$$

Da geometria euclidiana, o quociente do arco descrito pelo ângulo é x e o raio de aplicação (Figura 2) é dado por l ; portanto:

$$\theta = \frac{x}{l}. \quad (26)$$

Substituindo em (25),

$$F_{tg} = -mg \cdot \text{sen} \left(\frac{x}{l} \right). \quad (27)$$

Olhando para (27), vemos que a força não é proporcional à elongação e sim ao seno dela. Por consequência não se trata de um MHS, pois não está de acordo, por exemplo, com a equação (24). No entanto, para ângulos pequenos de oscilação, o resultado do seno do ângulo é aproximadamente igual a este ângulo [20]. Sendo assim,

$$\text{sen}(\theta) \cong \theta = \frac{x}{l}; \quad (28)$$

$$F_{tg} = -P \cdot \left(\frac{x}{l}\right) = -mg \left(\frac{x}{l}\right). \quad (29)$$

Como m , g e l são constantes, podemos agrupá-los em uma única constante (k) e deixar nossa equação da seguinte forma:

$$F = -kx, \quad (30)$$

e concluímos que para pequenas oscilações, a força é proporcional à elongação, tratando-se de um MHS. Chegando a esse conclusão, desejamos agora chegar à equação para o período. Para o começo, vamos unir as equações (24) e (27):

$$-mg \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{l}\right) = m[-\omega_0^2 x(t)]; \quad (31)$$

$$g \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{l}\right) = \omega_0^2 x. \quad (32)$$

Logo,

$$g \cdot \frac{x}{l} = \omega_0^2 x \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (33)$$

A frequência angular do movimento oscilatório é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad (34)$$

substituindo em (33),

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l}. \quad (35)$$

Expressando em termos de raiz quadrada:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (36)$$

Por fim, como queríamos demonstrar:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (37)$$

que é o nosso período do pêndulo simples.

4 ESPAÇO DE FASE NA MECÂNICA CLÁSSICA

O sistema do pêndulo simples comentado anteriormente será estudado no espaço de fase, que é determinado como o espaço construído pelas posições generalizadas e seus momentos conjugados correspondentes. Aglutina-se no contexto da mecânica lagrangiana e a mecânica hamiltoniana [7]. Falando um pouco sobre as duas mecânicas, a primeira associa a conservação de energia mecânica com a conservação do momento linear de um determinado sistema dinâmico [21]. A segunda é empregada em sistemas conservativos nos quais há alternância periódica entre energia cinética e energia potencial: uma bola quicando ou um pêndulo. Além do mais, são usadas em sistemas mais complexos, por exemplo: órbitas planetárias e mecânica quântica [22]. A mecânica hamiltoniana, assim como a lagrangeana, é capacitada em estudar e analisar sistemas mais complexos que à mecânica de Newton [7].

Por fim, quando estudamos o espaço de fase na mecânica clássica, compreendemos a existência de trajetórias que representam a evolução temporal dos sistemas por meio de suas variáveis, posição e momento, comentado acima.

5 SISTEMAS NÃO-LINEARES

Nesta seção, estudaremos sobre sistemas não-lineares, sendo eles vistos e descritos quando todas as suas configurações não apresentam um único sentido. Caracteriza-se por apresentar diversos caminhos e fornece múltiplos finais.

Sistemas não-lineares estão relacionados aos sistemas complexos [23], no qual, um sistema complexo, basicamente é composto por muitos elementos e apresentam comportamentos supostamente aleatórios, isto significa que não são explicados observando apenas suas propriedades gerais, mas que na realidade realiza-se a partir das interações dos seus constituintes [24].

5.1 Oscilações Amortecidas

Acompanhando o pêndulo simples, desconsideramos, a título de exemplo, os efeitos do ar. Sendo assim, o movimento representado é intitulado como oscilação livre, ou seja, seu movimento nunca cessará. Esse fato reduz a física real, em que as forças de dissipação ou atrito irão amortecer o movimento até o ponto no qual não ocorrerão mais oscilações. Podemos estudar esse tipo de movimento para o caso do oscilador harmônico [7].

Podemos explorar o movimento adicionando na equação diferencial um termo representativo da força de amortecimento. Não aparenta ser lógico que a força de amortecimento deva, em geral, depender do deslocamento, mas ela encaixaria ser uma função da velocidade, ou de alguma derivada temporal do deslocamento de ordem mais alta. Constantemente, conceitua-se a premissa de que a força é uma função linear da velocidade vetorial, $F_d = \alpha v$. Aqui também, serão estudadas apenas oscilações amortecidas unidimensionais, de modo que podemos caracterizar o termo de amortecimento por $-b\dot{x}$. [7].

Dessa maneira, se tivermos uma partícula de massa m movimentando-se por conta da combinação de uma força de restauração linear $-kx$ e uma força resistiva $-b\dot{x}$, considerando a segunda lei de Newton, a equação diferencial que detalha o movimento é:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (38)$$

Podemos escrever essa equação da seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (39)$$

Nesta equação, $\beta = b/2m$ é o parâmetro de amortecimento e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência angular característica na ausência de amortecimento. Se a gente substituir esses valores na (39) e multiplicarmos ambos os lados da equação por m , voltamos a (38).

A solução geral da equação (39) será (veja a equação A.5, APÊNDICE A):

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right], \quad (40)$$

tendo como raízes da equação auxiliar:

$$\begin{cases} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (41)$$

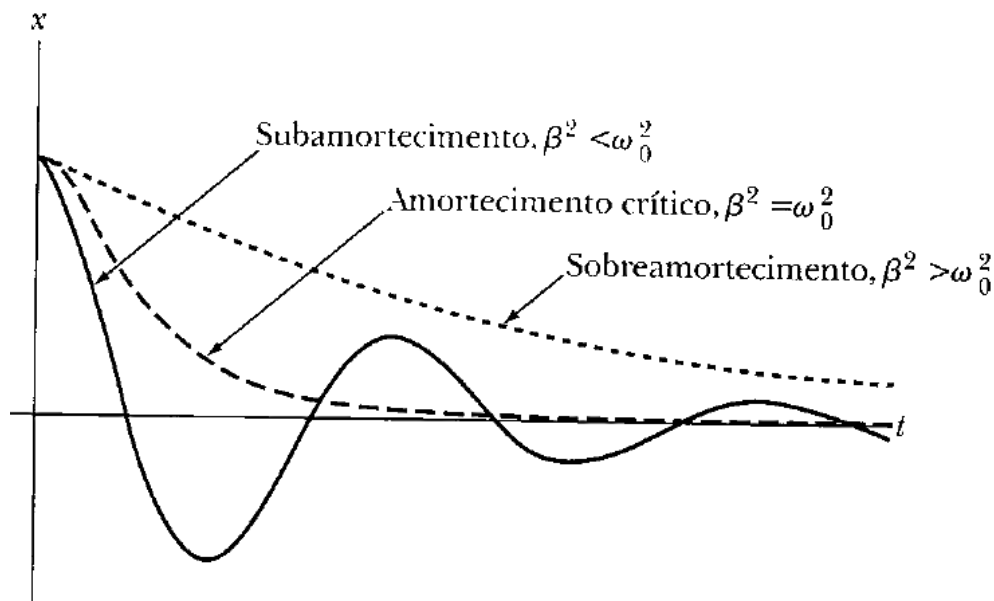
Como caso particular da equação (38), se b for igual à zero, chegaremos à equação (12).

Existem três casos possíveis em oscilações amortecidas:

- I. Subamortecimento: $\omega_0^2 > \beta^2$;
- II. Amortecimento crítico: $\omega_0^2 = \beta^2$;
- III. Sobreamortecimento: $\omega_0^2 < \beta^2$.

O movimento dos três casos é apresentando esquematicamente abaixo no Gráfico 4 para condições iniciais específicas.

Gráfico 4- Três Casos de Amortecimento.



5.1.1 Movimento Criticamente Amortecido

O caso de amortecimento crítico ocorre quando $\omega_0^2 = \beta^2$. As raízes da equação auxiliar (41) são então iguais e a função x (40) será:

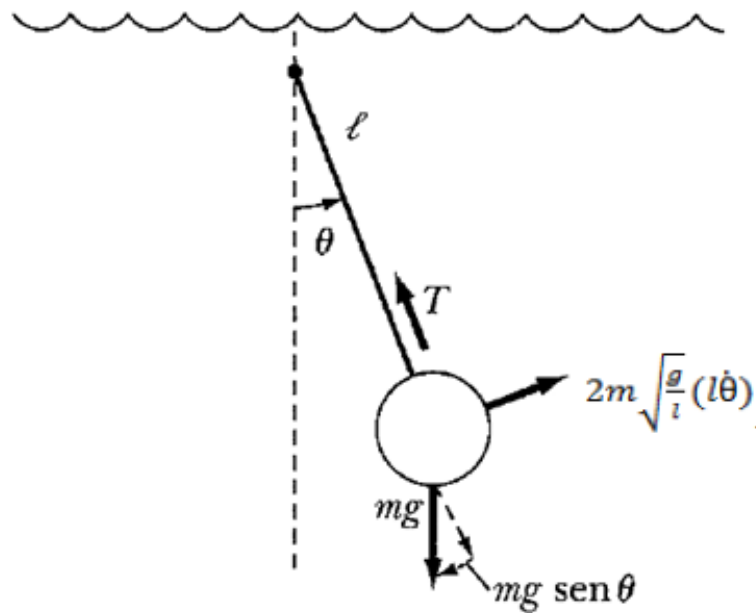
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (42)$$

Podemos conferir a representação no Gráfico 4, que nos mostra que para um conjunto de condições iniciais, um oscilador criticamente amortecido chegará próximo ao equilíbrio mais rápido do que um oscilador sobreamortecido ou subamortecido [7].

5.2 Pêndulo Criticamente Amortecido

Nesse contexto de oscilações amortecidas, um sistema que obedece a equação (42) é o pêndulo criticamente amortecido, problema 3.3 do livro: Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas [7]. A questão pedia para que consideremos um pêndulo de comprimento l e um prumo de massa m em sua extremidade se movendo em óleo com θ decrescente. O prumo pesado efetua pequenas oscilações, porém o óleo retarda o movimento do prumo com força resistiva proporcional à velocidade com $F_{res} = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta})$. O prumo é inicialmente puxado para trás em $t = 0$ com $\theta(0) = \alpha$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Logo, o enunciado pedia para que determinasse o deslocamento angular $\theta(t)$ e a velocidade $\dot{\theta}(t)$ como função do tempo. E por fim, que desenhasse o diagrama de fase se $\sqrt{\frac{g}{l}} = 10s^{-1}$ e $\alpha = 10^{-2}rad$.

Figura 4- Pêndulo do Exemplo 3.3



Fonte: [7]

Em primeiro momento, precisamos saber que o movimento oscilatório acontece em decorrência da ação das forças peso e tração, exercida por um fio. A gravidade produz a força de restauração:

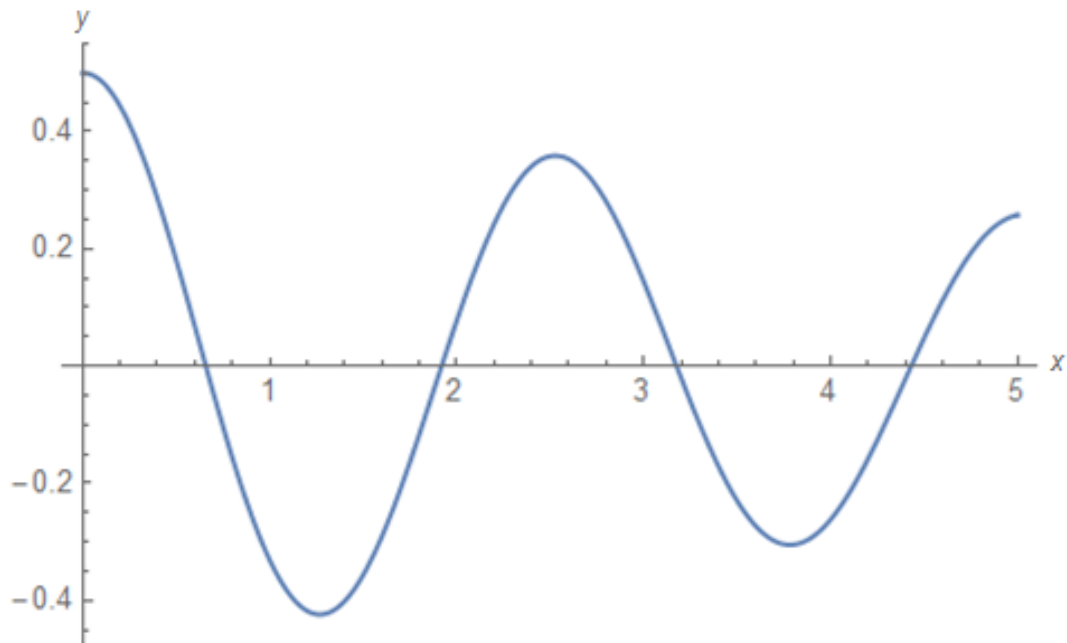
$$p_t = f_r = mg \sin \theta. \quad (43)$$

A segunda lei de Newton se torna,

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -f_r + F_{res}; \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - 2m\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta}). \end{cases} \quad (44)$$

Procuramos resolver a equação (44) de forma analítica no Mathematica®, mas o software não obteve êxito. Sendo assim, embora os métodos de Runge-Kutta sejam usuais para as soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, conseguimos solucionar a equação utilizando o método numérico. O código-fonte está no (APÊNDICE B) e o gráfico com característica subamortecido pode ser conferido abaixo:

Gráfico 5- Diagrama de Fase da Equação 44



Fonte: autoria própria

Utilizando a equação (44) para pequenas oscilações, usaremos (28) e teremos:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta - 2m\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta}); \quad (45)$$

$$l\ddot{\theta} + g\theta + 2\sqrt{\frac{g}{l}}(l\dot{\theta}) = 0. \quad (46)$$

Dividindo ambos os lados da equação por l :

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}(\dot{\theta}) + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (47)$$

A comparação desta equação com a (39) revela que $\omega_0^2 = g/l$, e $\beta^2 = g/l$. Portanto, $\omega_0^2 = \beta^2$ e o pêndulo será criticamente amortecido. Após ser puxado inicialmente para trás e liberado, o pêndulo acelera e, a seguir, desacelera à medida que θ se aproxima de zero. O pêndulo se move somente em uma direção à medida que retorna à sua posição de equilíbrio.

A solução da equação (47) é a (42). Podemos determinar os valores de A e B , substituindo as variáveis da (47) na (42) utilizando as condições iniciais. Valor de A será:

$$\theta(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}; \quad (48)$$

$$\begin{cases} \theta(0) = (A + B \cdot 0)e^{-\beta \cdot 0}; \\ \theta(0) = A = \alpha. \end{cases} \quad (49)$$

Para o valor de B , derivamos a equação (48):

$$\dot{\theta}(t) = Ae^{-\beta t}(-\beta) + Be^{-\beta t} + Bte^{-\beta t}(-\beta); \quad (50)$$

$$\dot{\theta}(t) = Be^{-\beta t} - \beta(A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (51)$$

Precisaremos dos valores $\dot{\theta} = 0$ segundo o enunciado, e $A = \alpha$ conforme vimos na equação (49). Assim,

$$\dot{\theta}(0) = B - \beta A = 0; \quad (52)$$

$$B = \beta A = \beta \alpha. \quad (53)$$

A equação (48) ficará:

$$\theta(t) = (\alpha + \beta \alpha t)e^{-\beta t} = \alpha(1 + \beta t)e^{-\beta t}, \quad (54)$$

e nosso deslocamento angular em função do tempo será:

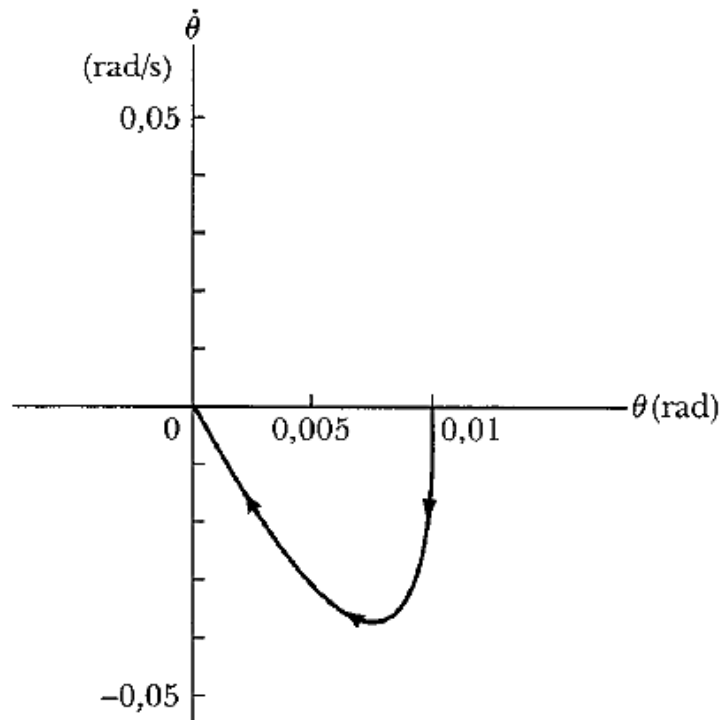
$$\theta(t) = \alpha \left(1 + \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}. \quad (55)$$

E para encontrarmos a velocidade angular em função do tempo, basta derivarmos a equação (55):

$$\dot{\theta}(t) = \alpha e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} \left(-\sqrt{\frac{g}{l}} \right) + \alpha \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} + \alpha \sqrt{\frac{g}{l}} t e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t} \left(-\sqrt{\frac{g}{l}} \right); \quad (56)$$

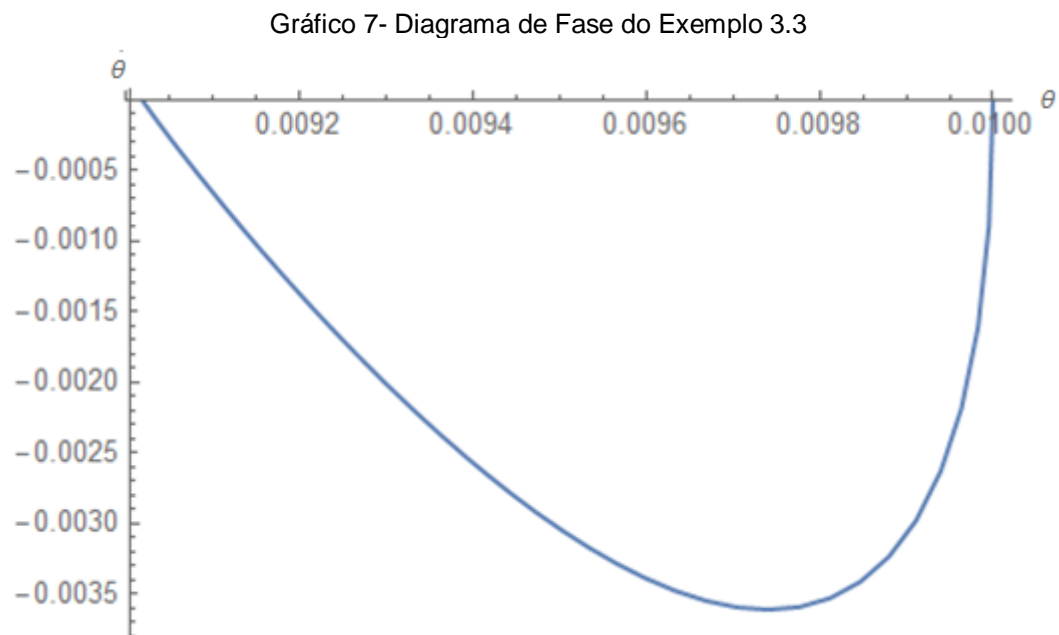
$$\dot{\theta}(t) = -\alpha \frac{g}{l} t e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}. \quad (57)$$

Gráfico 6- Diagrama de Fase do Exemplo 3.3



Fonte: [7]

Logo após chegarmos à equação que descreve os caminhos de fase em termos de função exponencial, utilizamos no software Mathematica® o código-fonte (APÊNDICE C), sendo o mesmo definido aplicando as equações bases do RK-4. O alvo foi encontrar o mesmo caminho de fase da equação (57), descrito na literatura, com a aplicação do método numérico. Para mais, geramos o Gráfico 7 no software para certificar os caminhos de fase da equação, como também sua semelhança com a Gráfico 6.

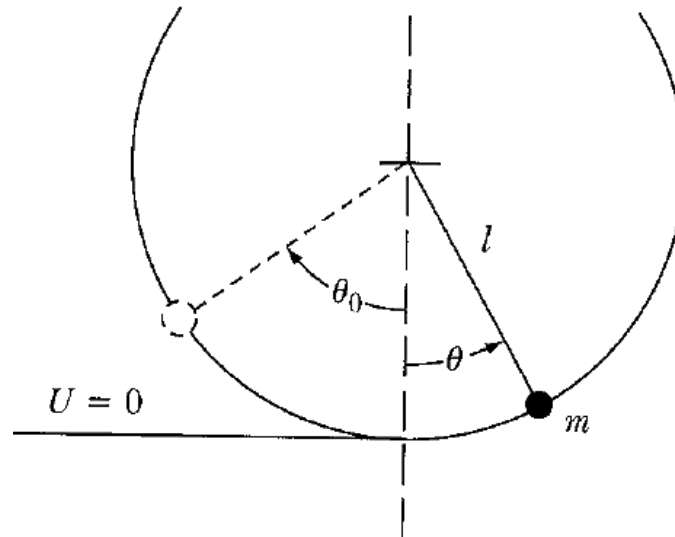


Fonte: autoria própria

5.3 Pêndulo Não-Linear

Na seção anterior, analisamos um pêndulo com amortecimento. Iremos agora examinar o movimento do pêndulo não-linear sem aproximação do seno com o ângulo (28). O objetivo é mostrar que as soluções de certos problemas não-lineares podem ser expressas na forma fechada por integrais elípticas. Vejamos na Figura 5 uma partícula de massa m restrita por uma barra sem peso, sem extensão para mover em um círculo vertical de raio l :

Figura 5- Pêndulo Plano



Fonte: [7]

O pêndulo plano onde a massa m não é necessária para oscilar em pequenos ângulos. O ângulo $\theta > 0$ está na direção anti-horária de forma que $\theta_0 < 0$. Para obtermos a equação do movimento, iremos equacionar o torque (τ) igualando seus valores: produto da força (F) e o raio (l), igualmente para o produto de aceleração angular ($\ddot{\theta}$) e a inércia (I) de rotação sobre o eixo:

$$I\ddot{\theta} = lF; \quad (58)$$

$$I = ml^2; F = -mg \sin \theta; \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}. \quad (59)$$

Logo,

$$ml^2\ddot{\theta} = -lmg \sin \theta; \quad (60)$$

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta; \quad (61)$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (62)$$

Se a amplitude do movimento for pequena, assim como no oscilador harmônico simples, usaremos a equação (28). Portanto,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (63)$$

Semelhantemente a equação (37), o período será:

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (64)$$

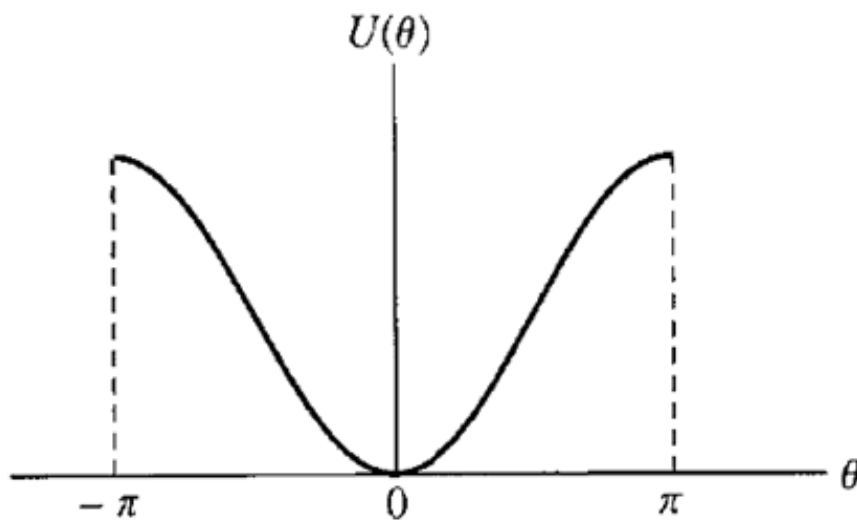
Desejando obter o resultado geral para o período no caso da amplitude ser finita, como o sistema é conservador, podemos dizer que:

$$T + U = E = \text{Constante}, \quad (65)$$

onde (T) é a Energia Cinética, (U) Energia Potencial e (E) Energia Mecânica.

Considerando o zero da energia potencial como o menor ponto no caminho circular descrito pelo peso do pêndulo, ou seja, $\theta = 0$ como podemos ver no Gráfico 8:

Gráfico 8- Potencial



Fonte: [7]

As energias cinética e potencial podem ser apresentadas como:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2; \quad (66)$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta). \quad (67)$$

Deixando $\theta = \theta_0$ no ponto mais alto do movimento,

$$T(\theta = \theta_0) = 0; \quad (68)$$

$$U(\theta = \theta_0) = mgl(1 - \cos \theta_0) = E. \quad (69)$$

Utilizando a identidade trigonométrica,

$$\cos \theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (70)$$

percebemos que:

$$E = 2mgl \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right); \quad (71)$$

$$U = 2mgl \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (72)$$

Expressando $T = E - U$:

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 = 2mgl \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]; \quad (73)$$

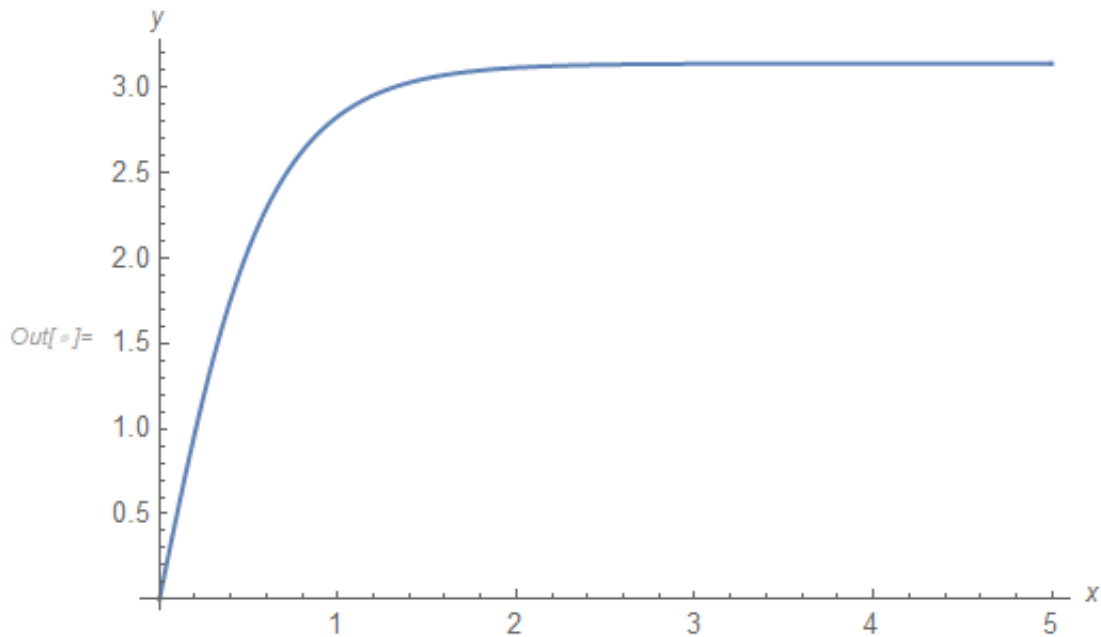
logo,

$$\dot{\theta} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (74)$$

Esta equação fornece a relação $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$, permitindo a construção do diagrama de fase para o pêndulo plano, Gráfico 10.

Resolvemos a equação (74) aplicando RK-4 (APÊNDICE D), e alcançamos o seguinte gráfico:

Gráfico 9- Diagrama de Fase da Equação 74



Fonte: autoria própria

Derivando (74) em relação ao tempo,

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (75)$$

Integrando (75), encontraremos o período. Recordando que se trata de um movimento simétrico, então a integração do lado esquerdo da equação dentro do intervalo $\theta = 0$ e $\theta = \theta_0$ produz um período de $\frac{T}{4}$. Desta forma,

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (76)$$

Acima, temos uma integral elíptica de primeiro grau. Para visualizarmos com maior clareza, aplicaremos o método da substituição:

$$z = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}; \quad (77)$$

$$dz = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} d\theta; \quad (78)$$

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (79)$$

Fazendo uma modelagem:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad (80)$$

$$z^2 k^2 = 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad (81)$$

$$\sqrt{1 - z^2 k^2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (82)$$

Então,

$$dz = \frac{\sqrt{1 - z^2 k^2}}{2k} d\theta. \quad (83)$$

Portanto:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 [k^2 - z^2 k^2]^{-\frac{1}{2}} \frac{2k dz}{\sqrt{1 - z^2 k^2}}; \quad (84)$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{k dz}{\sqrt{k^2(1 - z^2)} \sqrt{1 - z^2 k^2}}; \quad (85)$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 [(1-z^2)(1-z^2k^2)]^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (86)$$

Para o movimento oscilatório resultar $|\theta_0| < \pi$ ou, semelhantemente, $\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = k$, onde $-1 < k < 1$. Podemos expandir $(1-z^2k^2)^{-\frac{1}{2}}$ na seguinte série:

$$(1-z^2k^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{k^2z^2}{2} + \frac{3k^4z^4}{8}, \quad (87)$$

veja (APÊNDICE E, equação E.2).

Desta forma, a nossa expressão para o período ficará:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{k^2z^2}{2} + \frac{3k^4z^4}{8} \right]. \quad (88)$$

Resolvendo gradativamente (veja APÊNDICE F, equação F.3) a equação (88), descobrimos que o período será:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{3k^4}{8} \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} + \dots \right]; \quad (89)$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right] = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right]. \quad (90)$$

Se $|k|$ for grande (isto é, próximo a 1), serão necessários muitos termos para produzir um resultado razoavelmente preciso. Mas, para k pequeno, a expansão converge rapidamente.

Em conformidade com [7], uma vez que

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right), \quad (91)$$

então

$$k \cong \left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \left(\frac{\theta_0^3}{48}\right). \quad (92)$$

O resultado, correto para quarta ordem, é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 + \dots \right]. \quad (93)$$

Sendo assim, embora o pêndulo plano não seja isócrona (intervalos de tempo iguais), é aproximadamente para pequenas amplitudes de oscilação. Essa descoberta foi feita por Galileu na catedral de Pisa em 1581. A expressão para o

período de pequenas oscilações foi apresentada por Christiaan Huygens em 1673. Oscilações finitas foram averiguadas primeiro por Euler em 1736 [7].

O θ_0 da equação (71) específica à energia total. Se θ_0 e θ forem ângulos pequenos, a equação (74) terá a seguinte estrutura:

$$\dot{\theta}^2 = 4 \frac{g}{l} (\theta_0^2 - \theta^2) \quad (94)$$

$$\left(\sqrt{\frac{l}{g}} \dot{\theta} \right)^2 + \theta^2 \cong \theta_0^2 \quad (95)$$

Sejam as coordenadas do plano de fase θ e $\dot{\theta} / \sqrt{(g/l)}$, observamos que os caminhos de fase próximos a $\theta = 0$ serão aproximadamente círculos. Este resultado é aguardado, porque para θ_0 pequeno, a movimentação é muito próxima ao do movimento harmônico simples.

Na região $-\pi < \theta < \pi$, onde podemos ver também que $E < 2mgl \equiv E_0$, trata-se de um sistema de curvas fechadas que são dadas pela equação (74); além disso, essa parte é semelhante ao da partícula limitada no poço potencial, como podemos conferir no Gráfico 8.

Para sistemas em que a energia total ultrapassa E_0 , o movimento não é mais oscilatório, apesar de ainda ser periódico. Esta situação significa que o pêndulo está efetuando revoluções completas sobre seu eixo.

Outra característica é que o nosso potencial é periódico, isso nos mostra que teremos o mesmo caminho de fase, por exemplo, para as regiões $\pi < \theta < 3\pi$, $-3\pi < \theta < -\pi$ etc. Sobre o eixo θ , temos os pontos $(\dots, -2\pi, 0, 2\pi, \dots)$ que são momentos de equilíbrio estável, cujos pontos são os responsáveis de conduzir todas as outras trajetórias.

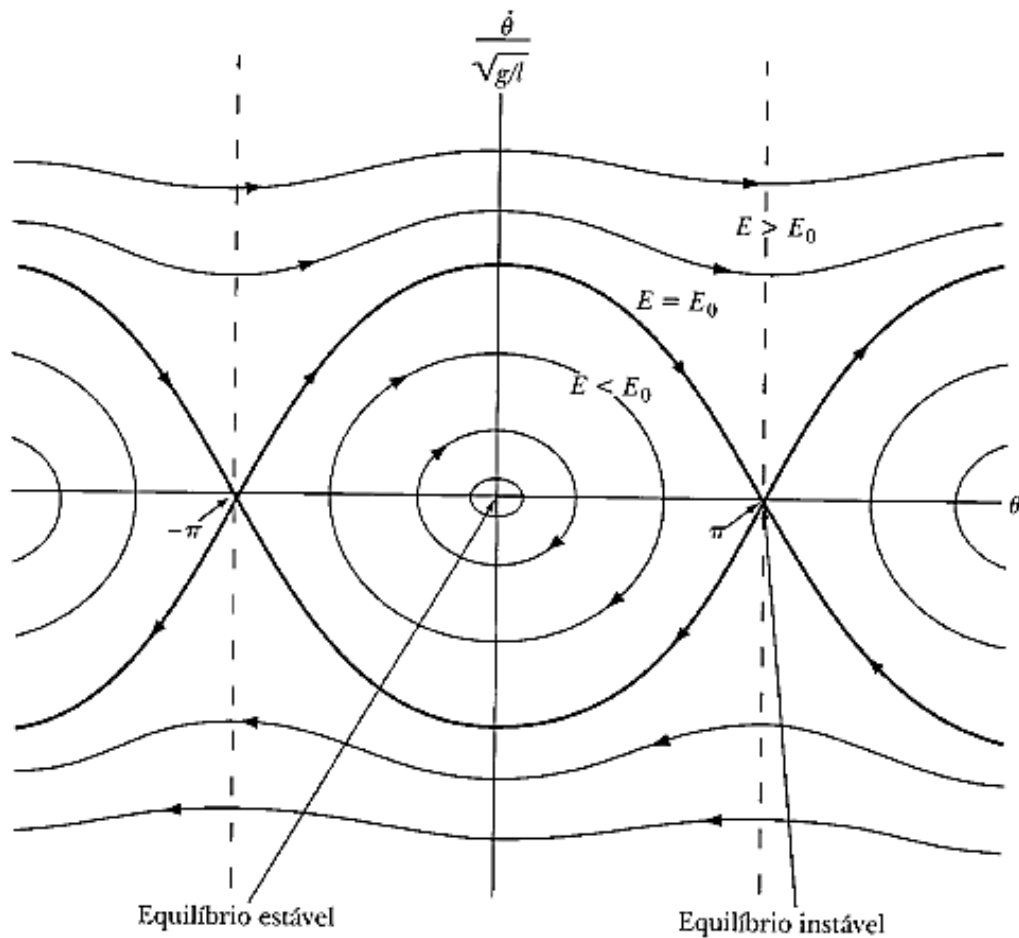
Frequentemente, o diagrama é representado somente para um ciclo completo, ou seja, no intervalo de $-\pi < \theta < \pi$; por isso, que no Gráfico 10 temos linhas pontilhadas sobre os ângulos $-\pi$ e π .

Considerando que a energia total é E_0 , o $\theta_0 = \pm\pi$ na equação (71); sendo assim, a equação (74) ficará:

$$\dot{\theta} = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (96)$$

Logo, os caminhos de fase serão funções cossenoidais.

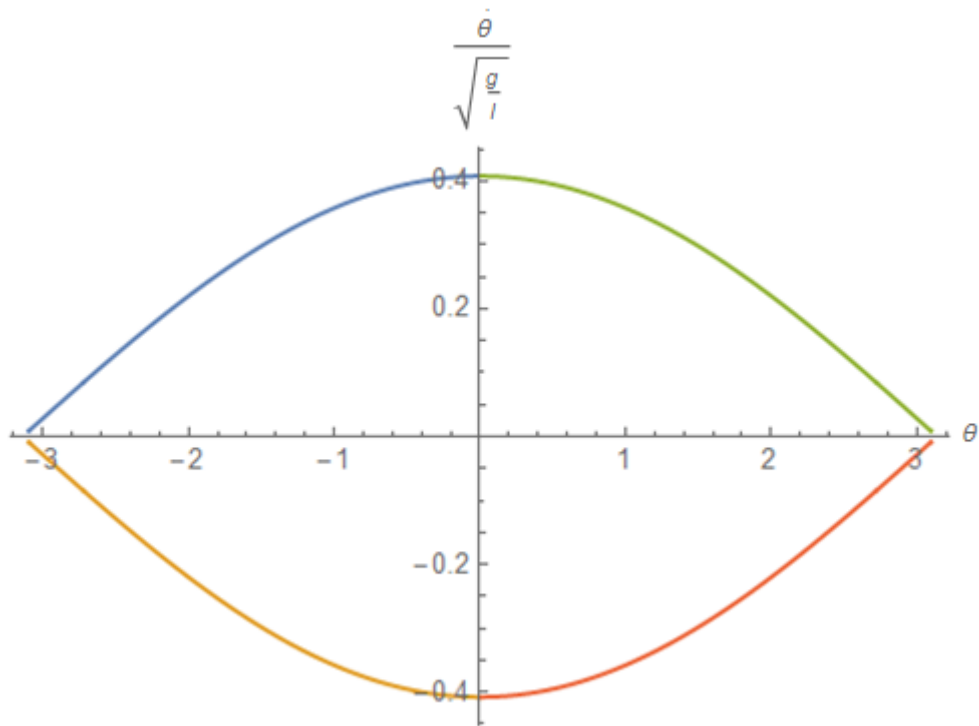
Gráfico 10- Diagrama de Fase para o Pêndulo Plano



Fonte: [7]

A equação (96) representa uma equação diferencial de primeira ordem, que descreve os caminhos de fase em termos de funções cossenoidais. Resolver de forma analítica é um caminho árduo, por isso, utilizamos no software Mathematica® o código-fonte (APÊNDICE G), sendo o mesmo definido empregando as equações bases do RK-4. O objetivo foi encontrar o mesmo caminho de fase demonstrado na literatura, com a aplicação do método numérico. Para mais, geramos o Gráfico 11 no software para constatar os caminhos de fase da equação citada acima, como também sua semelhança com o Gráfico 10.

Gráfico 11- Diagrama de Fase para o Pêndulo Plano



Fonte: autoria própria

6 CONCLUSÃO

Fazendo uso do software Mathematica[®], foi possível aplicar o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4) para problemas do pêndulo simples não-linear. Apreciamos por meio dos gráficos que o método RK-4 é mais eficaz em relação aos outros de ordem menor (RK-1 e RK-2), chegando a valores muito próximos do real, destacando-se também principalmente nos resultados gráficos gerados pelo software, exibindo a eficácia do método na solução de equações diferenciais de primeira ordem.

Com êxito nos resultados, contribuímos em expor que a maior parte dos problemas físicos são complexos e envolvem fenômenos não-lineares, sendo usual encontrar-se numa situação em que os conhecimentos matemáticos não são suficientes para a descoberta de uma solução exata. Sendo assim, despertamos a concepção de que existem situações em que é mais adequado um método numérico ao método analítico, ainda que este exista, a título de exemplo, se a solução para um problema envolver muitos cálculos. Além do mais, mostramos a importância do Mathematica[®] nas suas expressões algébricas, resoluções dos cálculos numéricos e geração de gráficos.

O trabalho limitou-se na aplicação do método Runge-Kutta de quarta ordem, como também resolveu apenas o problema do pêndulo simples não-linear com condições específicas, reconhecendo que existem inúmeras outras áreas de aplicação na natureza. Portanto, possíveis aplicações do método podem ser feitas em problemas que envolvem, por exemplo, o oscilador harmônico não-linear, lei do resfriamento de Newton, aplicação do método em sistemas mecânicos no espaço de fase etc. O método também se expande no desenvolvimento de trabalhos na área de engenharia e em programas de pós-graduação em física, química etc.

O estudo foi desenvolvido de forma dialogada com o orientador, leitura de artigos, trabalhos de conclusão de cursos, dissertações etc. Ao longo do processo, sempre o objetivo foi fornecer informações verdadeiras e pautadas no conhecimento da comunidade científica.

REFERÊNCIAS

1. LOBÃO, Diomar Cesar. **INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS**. Volta Redonda/RJ, 2017. Disponível em: <https://www.professores.uff.br/diomarcesarlobao/wp-content/uploads/sites/85/2017/09/note6.pdf>. Acesso em: 24 dez. 2022.
2. ARAUJO, Eduardo. **BLOG / MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SIMULAÇÃO NA ENGENHARIA** .30 de novembro de 2017. Disponível em: <https://www.esss.co/blog/metodos-numericos-para-simulacaona-engenharia/>. Acesso em: 24/11/2022.
3. ROCHA, Daniela; LUSTOSA, Lisete . **Resgatando métodos para o cálculo de raízes quadradas e raízes cúbicas**. Universidade Federal do Fluminense. Rio de Janeiro, 1997.
4. MEDEIROS, Cleide Farias de; MEDEIROS, Alexandre. **MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO NA HISTÓRIA E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Ciência & Educação, Volta Redonda/RJ, v. 10, n. 3, p. 545-557, 11 ago. 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/L3f9KpPFPnk4rfnDfGW7VGn/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 24 dez. 2022.
5. BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto. 2002.
6. LYRA, Felipe Palmeira et al. **A Importância dos Métodos Numéricos para a Astrofísica**. Universidade federal do Fluminense. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/11099/Felipe%20Palmeira%20Lyra.pdf?sequence=1&isAllowed=y> .Acesso em 24/12/2022.
7. THORNTON, Stephen; MARION, Jerry. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 1. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2011. 608 p. ISBN 8522109060.
8. STERZA, R. L.; BRANDI, A. C. Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 7, p. 12-22, dez. 2016. Edição ERMAC. DOI: 10.21167/cqdvol7ermac201623169664rlsacb1222 - Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/>
9. GRIFFITHS, David F.; Higham, Desmond J. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations - Initial Value Problems**. Springer, New York, 2010.

10. FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico**. 1. ed. [S. l.]: Pearson Universidades, 2006. 520 p. Disponível em: http://galdino.pbworks.com/w/file/134978082/Livro_Neide.pdf. Acesso em: 31 dez. 2022.
11. KINZEL, Wolfgang; REENTS, Georg. **Physics by computer: Programming Physical Problems Using Mathematica and C**. [S. l.: s. n.], 1996. ISBN 3-540-62743-X.
12. VALLE, Marcos Eduardo. **Aula 13 Métodos de Runge-Kutta**: MS211 - Cálculo Numérico. [S. l.], 2015. Departamento de Matemática Aplicada Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula13.pdf>. Acesso em: 30 dez. 2022
13. MAIOLI, G. **Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/134029/000857260.pdf?sequencia=1>
14. GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas**: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Porto Alegre: Bookman, 2008.
15. LIMA, Carla Claudiane De. **APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA EM SISTEMAS MECÂNICOS NO ESPAÇO DE FASE**. Orientador: Prof. Aléssio T. B. Celeste. 2021. 33 f. TCC (Licenciatura em física) - IFSertãoPE/Serra Talhada, Serra Talhada/PE, 2021.
16. HELERBROCK, Rafael. **Movimento harmônico simples**. [S. l.], [s.d.]. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm>. Acesso em: 31 dez. 2022.
17. JÚNIOR, Joab Silas da Silva. **"O que é frequência e período?"**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/fisica/o-que-e-frequencia-e-periodo.htm>. Acesso em 31 de dezembro de 2022.
18. HALLIDAY D. ; RESNICK R. e WALKER J. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica Volume 2**. 10ª edição. Editora LTC, 2016. ISBN 978-85-216-3036-4.

19. YARTEY, Joseph N. A.; RIBEIRO, Simone S. **Equações diferenciais**. Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2017. 176 p. ISBN 978-8292-143-2. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/retrieve/166324/eBook_Equacoes_Diferenciais-Licenciatura_Matematica_UFBA.pdf. Acesso em: 26 mar. 2023.
20. DE MELLO, Vera Lucia Martins. **PÊNDULO SIMPLES, DE TORÇÃO E FÍSICO**. Instrumentação para o ensino de Física IV- Universidade Federal do Sergipe, São Cristovão-SE, 2012.
21. LIRA, Júlio César Lima. **Mecânica Lagrangeana**. [S. l.]: InfoEscola, 2010. Disponível em: <https://www.infoescola.com/fisica/mecanica-lagrangeana/>. Acesso em: 31 dez. 2022.
22. LIRA, Júlio César Lima. **Mecânica Hamiltoniana**. [S. l.]: InfoEscola, 2010. Disponível em: <https://www.infoescola.com/fisica/mecanica-hamiltoniana/>. Acesso em: 31 dez. 2022.
23. GLERIA, Iram; MATSUSHITA, Raul; DA SILVA, Sergio. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potencia: Complex systems, criticality, and power laws. **Sistemas complexos**, [s. l.], v. 26, n. 2, p. 99 - 108, 13 maio 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/T5LKgJHpdMJrXZnNsML5pRJ/?lang=pt>. Acesso em: 5 jan. 2023.
24. SATO, Eduardo. **Sistemas complexos e o Nobel de Física de 2021**. [S. l.], 3 nov. 2021. Disponível em: <https://www.institutoprincipia.org/post/sistemas-complexos-e-o-nobel-de-f%C3%ADsica-de-2021#:~:text=Basicamente%2C%20um%20sistema%20complexo%20%C3%A9,das%20intera%C3%A7%C3%B5es%20dos%20seus%20constituintes>. Acesso em: 5 jan. 2023.

APÊNDICE A- PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO 41

Começamos com a equação (39), que é a equação diferencial que detalha o movimento de oscilações amortecidas:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Por razões semelhantes à equação (12), iremos considerar a função $x(t) = e^{at}$ como uma possível solução para a equação. Substituindo e^{at} na equação:

$$(e^{rt}) + 2\beta(e^{rt}) + \omega_0^2(e^{rt}) = 0;$$

$$r^2 e^{rt} + 2\beta(re^{rt}) + \omega_0^2(e^{rt}) = 0;$$

$$e^{rt}(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2) = 0;$$

$$\Delta = (2\beta)^2 - 4(1)\omega_0^2;$$

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2;$$

$$r = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\begin{cases} r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \\ r_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Assim sendo, teremos x_1 e x_2 :

$$x_1 = e^{r_1 t} = e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}; \quad (\text{A.2})$$

$$x_2 = e^{r_2 t} = e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (\text{A.3})$$

Tomando a combinação linear das duas soluções:

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}; \quad (\text{A.4})$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 44

In[1]:= g=9.81;

In[2]:= l=1.5;

In[3]:= α =0.5;

In[4]:= ba=0.5;

In[5]:= a=0;

In[6]:= b=5;

In[7]:= h=0.01;

In[8]:= $L=(b-a)/h$;

In[9]:= Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]

y[0]= α ;

z[0]=0;

F[x_,y_,z_]=z;

G[x_,y_,z_]= -(g/l)Sin[y]-ba/l z;

Do{

k1=h*F[x[n],y[n],z[n]],

t1=h*G[x[n],y[n],z[n]],

k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2,z[n]+k1/2],

t2=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t1/2,z[n]+t1/2],

k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2,z[n]+k2/2],

t3=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t2/2,z[n]+t2/2],

k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3,z[n]+k3],

t4=h*G[x[n]+h,y[n]+t3,z[n]+t3],

y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),

z[n+1]=z[n]+(t1/6+t2/3+t3/3+t4/6)},

{n,0,L}]

In[10]:= Grafico2=ListLinePlot[{Table[{x[n],y[n]},{n,0,L}], AxesLabel \rightarrow {x,y}]

APÊNDICE C- CÓDIGO DO PÊNDULO COM AMORTECIMENTO

In[1]:= g=9.81;

In[2]:= l=1;

In[3]:= $\alpha=10^{-2}$;

In[4]:= a=0;

In[5]:= b=10;

In[6]:= h=0.01;

In[7]:= L=(b-a)/h;

In[8]:= $\theta[0]=\alpha$;

In[9]:= F[0]=0;

In[10]:= $F[t, \theta]=((- \alpha g)/l)t e^{-10t}$;

In[11]:= Do[t[n]=n*h,{n, 0,L}

In[12]:= Do{

k1=h*F[t[n], $\theta[n]$],

k2=h*F[t[n]+h/2, $\theta[n]+k1/2$],

k3=h*F[t[n]+h/2, $\theta[n]+k2/2$],

k4=h*F[t[n]+h, $\theta[n]+k3$],

$\theta[n+1]=\theta[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)$,

{n,0,L}

In[13]:= ListLinePlot[{Table[{ $\theta[n]$ },((- α *g)/l)t[n] e^{-10t[n]}},{n, 0,L/10}], AxesLabel → { θ , $\dot{\theta}$ }

APÊNDICE D- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 74

In[1]:= g=9.81;

In[2]:= l=1.5;

In[3]:= a=0;

In[4]:= b=5;

In[5]:= h=0.01;

In[6]:= L=(b-a)/h;

In[7]:= y0=π;

In[8]:= c1=2 $\sqrt{\frac{g}{l}}$;

In[9]:= c2= sin $\left[\frac{y_0}{2}\right]^2$;

In[10]:= (* Condição inicial *)

y[0]=0;

F[x_,y_]=c1 $\sqrt{c2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2}$;

In[11]:= Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]

Do{

k1=h*F[x[n],y[n]],

k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2],

k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2],

k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3],

y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),

{n,0,L}]

In[12]:= ListLinePlot[{Table[{x[n],y[n]},{n,0,L}], AxesLabel → {x,y}]

APÊNDICE E- DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 86

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n = f^0(0) + f^1(0)z + \frac{f^2(0)}{2!} z^2 + \frac{f^3(0)}{3!} z^3 + \frac{f^4(0)}{4!} z^4 \dots \quad (\text{E.1})$$

$$f^0(z) = (1 - z^2 k^2)^{-\frac{1}{2}}; f^0(0) = 1$$

$$f^1(z) = k^2 z (1 - z^2 k^2)^{-\frac{3}{2}}; f^1(0) = 0$$

$$f^2(z) = 3k^4 z^2 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{5}{2}} + k^2 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f^2(0) = k^2$$

$$f^3(z) = 6k^4 z (1 - z^2 k^2)^{-\frac{5}{2}} + 15k^6 z^3 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{7}{2}} + 3k^4 z (1 - z^2 k^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^3(0) = 0$$

$$f^4(z) = 9k^4 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{5}{2}} + 90k^6 z^2 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{7}{2}} + 105k^8 z^4 (1 - z^2 k^2)^{-\frac{9}{2}}$$

$$f^4(0) = 9k^4$$

Logo,

$$\begin{aligned} (1 - z^2 k^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + 0 \cdot z + \frac{k^2}{2!} z^2 + \frac{0}{3!} z^3 + \frac{9k^4}{4!} z^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

APÊNDICE F- RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO 88

$$T = 4 \sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{3k^4 z^4}{8} \right]$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = [\sin^{-1}(z)]_0^1 = \frac{\pi}{2} \quad (F.1)$$

$$\frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}; z = \sin t; dz = \cos t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos t dt; 1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}} \cos t dt; \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \left[\sin^{-1}(z) - \frac{\sin(2 \sin^{-1}(z))}{2} \right]_0^1; \sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \sin^{-1}(z) - \frac{2 \sin[\sin^{-1}(z)] \cos[\sin^{-1}(z)]}{2} \right\}_0^1$$

$$\frac{1}{2} \left[\sin^{-1}(z) - z \sqrt{1-z^2} \right]_0^1$$

$$\frac{k^2}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k^2}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad (F.2)$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{3k^4 z^4}{8} \right] = \frac{3k^4}{8} \int_0^1 \frac{z^4 dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}; z = \sin t; dz = \cos t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(t)}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}} \cos t \, dt; \quad 1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t))^2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2} \right)^2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos(2t))^2}{4} \, dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \cos 2t + \cos^2(2t)}{4} \, dt = \frac{1}{4} \left\{ [t - \sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2t) \, dt \right\}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2t) \, dt; \quad y = 2t; \quad dt = \frac{dy}{2}; \quad \int_0^{\pi} \cos^2(y) \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2y)}{2} \, dy =$$

$$= \frac{1}{4} \left[y + \frac{\sin(2y)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \left[2t + \frac{\sin(2 \cdot 2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \cos 2t + \cos^2(2t)}{4} \, dt = \left[\frac{3t}{8} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin(4t)}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{3k^4}{8} \int_0^1 \frac{z^4 \, dz}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} &= \left[\frac{3 \sin^{-1}(z)}{8} - \frac{\sin[2 \sin^{-1}(z)]}{4} + \frac{\sin[4 \sin^{-1}(z)]}{32} \right]_0^1 \\ &= \frac{3k^4}{8} \frac{3\pi}{82} \end{aligned} \tag{F.3}$$

APÊNDICE G- CÓDIGO PÊNDULO SIMPLES NÃO-LINEAR

In[1]:=g=9.81;

In[2]:=l=2;

In[3]:=a=0;

In[4]:=b=10;

In[5]:=h=0.01;

In[6]:=L=(b-a)/h;

In[7]:=x[0]=0;

In[8]:=y[0]=0;

In[9]:= $F[t_, x_] = 2 * \sqrt{\frac{l}{g}} * \text{Cos}[x/2];$

In[10]:= $G[t_, y_] = -2 * \sqrt{\frac{l}{g}} * \text{Cos}[y/2];$

In[11]:=Do[t[n]=n*h,{n,0,L}]

In[12]:=Do{

k1=h*F[t[n],x[n]],

k2=h*F[t[n]+h/2,x[n]+k1/2],

k3=h*F[t[n]+h/2,x[n]+k2/2],

k4=h*F[t[n]+h,x[n]+k3],

x[n+1]=x[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)},

{n,0,L}]

In[13]:=Do[t[n]=n*h,{n,0,L}]

In[14]:=Do{

k1=h*G[t[n],y[n]],

k2=h*G[t[n]+h/2,y[n]+k1/2],

k3=h*G[t[n]+h/2,y[n]+k2/2],

k4=h*G[t[n]+h,y[n]+k3],

y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)},

{n,0,L}]

In[15]:=ListLinePlot[{Table[{-x[n],(2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)},{n,0,L}],Table[{-

x[n],(-2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)},{n,0,L}]]];

In[16]:=ListLinePlot[{Table[{x[n], (2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}], Table[{x[n], (-2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}]}];

In[17]:=ListLinePlot[{Table[{-x[n], (2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}], Table[{-x[n], (-2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}], Table[{x[n], (2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}], Table[{x[n], (-2 * $\sqrt{\frac{l}{g}}$ * Cos[x[n]/2]) / ($\sqrt{\frac{g}{l}}$)}, {n, 0, L}], AxesLabel -> { θ , $\dot{\theta} / \sqrt{\frac{g}{l}}$ }]